

Gravitação Universal

Assunto: Velocidade Orbital e de Escape

Aula 03 – Velocidade de Escape

Para acompanhar esta aula em vídeo, vá na aba Aulas e clique em Gravitação Universal – [aula 03](#)

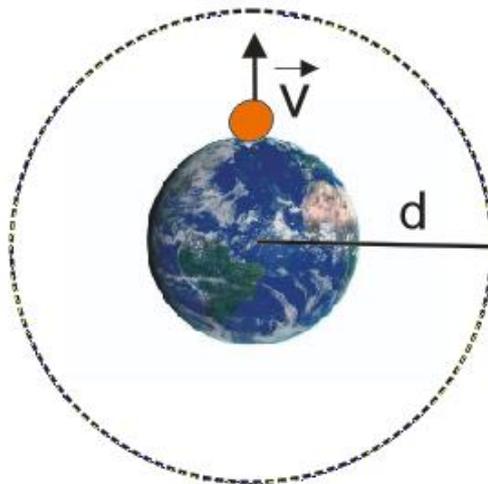
Velocidade de Escape

Como vimos na aula anterior, estou representando pela linha pontilhada ao lado o Campo Gravitacional da Terra. Qualquer objeto colocado dentro desse campo, será atraído pela Terra. Estudamos também que a velocidade para que um satélite fique em uma órbita circular ao redor

da Terra é dada por $v_{orb} = \sqrt{G \frac{M}{d}}$. É demonstrado, (deixo

para fazer a demonstração da fórmula na videoaula), que a velocidade em que você deve lançar o objeto para cima, para que ele saia do campo gravitacional da Terra é dada por

$$v = \sqrt{2 \cdot G \frac{M}{d}}, \text{ ou seja, } v_{esc} = \sqrt{2} \cdot G \frac{M}{d} \rightarrow \boxed{\sqrt{2} \cdot v_{orb}}$$



Para facilitar a resolução de exercícios, desprezamos a resistência do ar quando o lançamento é da Terra, e a velocidade orbital teria que ser considerada como se toda a massa da Terra estivesse concentrada no centro de massa e o corpo estivesse numa altura igual ao raio da Terra. Já para satélites em órbita da Terra, teremos os seguintes casos:

$v < v_{orb}$	Órbita elíptica. O corpo não permanecerá em órbita devido a colisão com o planeta.	
$v = v_{orb}$	Órbita circular.	
$v_{orb} < v < v_{esc}$	Órbita elíptica. A Terra estará em um dos focos desta elipse.	
$v = v_{esc}$	A trajetória é parabólica e não constitui uma órbita, pois o corpo não retorna à mesma posição.	

Exercício de aprendizagem:

1) (Uerj) Considere a existência de um planeta homogêneo, situado em uma galáxia distante, e as informações sobre seus dois satélites apresentadas na tabela.

Satélite	Raio da órbita circular	Velocidade orbital
x	9R	v_x
y	4R	v_y

Sabe-se que o movimento de x e y ocorre exclusivamente sob ação da força gravitacional do planeta.

Determine a razão v_x / v_y .

Exercícios de Fixação

1) (Uem) Em um livro do escritor estadunidense de ficção científica Robert Anson Heinlein (1907-1988), lê-se: “A escolha do pessoal para a primeira expedição humana a Marte foi feita tendo como base a teoria de que o maior perigo para o homem era o próprio homem. Naquele tempo – oito anos terrestres depois da fundação da primeira colônia humana em Luna – uma viagem interplanetária de seres humanos devia ser feita em órbitas de queda livre, levando, da Terra a Marte, cento e cinquenta e oito dias terrestres e vice-versa, além de uma espera em Marte de cento e cinquenta e cinco dias, até que os planetas voltassem lentamente às posições anteriores, permitindo a existência de uma órbita de retorno.”

(HEINLEIN, R. A. *Um estranho numa terra estranha*. Rio de Janeiro: Artenova, 1973, p. 3).

Considere a razão entre as massas da Terra e de Marte igual a 9 e a razão entre os raios da Terra e de Marte igual a 2; considere, ainda, que não há forças de atrito e que a velocidade de escape de um corpo é a velocidade mínima com que se deve lançá-lo a partir da superfície de um astro para que ele consiga vencer a atração gravitacional desse astro.

Assinale o que for **correto**.

01) A velocidade de escape de um corpo é diretamente proporcional à raiz quadrada da razão entre a massa e o raio do planeta.

02) A velocidade de escape de uma espaçonave a partir da superfície da Terra é menor do que a velocidade de escape com que se deve lançar a mesma espaçonave a partir da superfície de Marte.

04) A velocidade de escape de uma espaçonave não depende de sua massa.

08) Para que uma espaçonave orbite o planeta Marte, a velocidade dela deve ser proporcional ao raio da órbita.

16) Uma espaçonave com os motores desligados e aproximando-se de Marte está sujeita a uma força que depende de sua velocidade.

2) (Uem) Satélites artificiais são dispositivos que ficam orbitando ao redor da Terra. Atualmente eles são muito utilizados em telecomunicações, pesquisas, monitoramentos climáticos e em muitas outras funções. Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Um satélite orbitando ao redor da Terra é um projétil movendo-se rápido o suficiente para continuar girando indefinidamente ao redor dela devido à repulsão entre ambos.

02) Uma pedra abandonada verticalmente a partir do repouso, nas proximidades da superfície da Terra, sofre uma aceleração de $9,8 \text{ m/s}^2$ e percorre uma distância de 9,8 m durante o primeiro segundo. Despreze a resistência do ar.

04) O cubo do período da órbita de um satélite é diretamente proporcional ao quadrado do raio desta órbita.

08) A velocidade para um satélite orbitar ao redor da Terra depende da massa do mesmo.

16) A velocidade de escape é a menor velocidade com que se deve lançar um corpo da superfície de um planeta para que chegue ao infinito com velocidade nula.

3) (Uerj) O valor da energia potencial, E_p , de uma partícula de massa m sob a ação do campo gravitacional de um corpo celeste de massa M é dado pela seguinte expressão: $E_p = GmM/r$.

Nessa expressão, G é a constante de gravitação universal e r é a distância entre a partícula e o centro de massa do corpo celeste.

A menor velocidade inicial necessária para que uma partícula livre-se da ação do campo gravitacional de um corpo celeste, ao ser lançada da superfície deste, é denominada velocidade de escape. A essa velocidade, a energia cinética inicial da partícula é igual ao valor de sua energia potencial gravitacional na superfície desse corpo celeste.

Buracos negros são corpos celestes, em geral, extremamente densos. Em qualquer instante, o raio de um buraco negro é menor que o raio R de um outro corpo celeste de mesma massa, para o qual a velocidade de escape de uma partícula corresponde à velocidade c da luz no vácuo.

Determine a densidade mínima de um buraco negro, em função de R , de c e da constante G .

4) (Ufrn) Para um foguete escapar da atração gravitacional de um corpo celeste, é necessário que ele tenha energia cinética ($E_c = m \cdot v^2/2$) pelo menos igual ao valor absoluto da sua energia potencial gravitacional ($|E_{pg}| = G \cdot M \cdot m/r$).

Nessas expressões, m representa a massa do foguete; v , sua velocidade; G , a constante de gravitação universal; M , a massa do corpo celeste; r , a distância do centro desse corpo ao centro de massa do foguete.

a) A velocidade que um foguete precisa alcançar para poder libertar-se da atração gravitacional do corpo celeste é conhecida como velocidade de escape (V_{esc}). Igualando E_c ao $|E_{pg}|$, obtenha uma expressão (literal) para V_{esc} .

b) Sabendo que a razão entre as massas da Terra e da Lua é $M_t/M_l \approx 84$ e que a razão entre os raios da Terra e da Lua é $r_t/r_l \approx 4$, calcule a razão entre as velocidades de escape para um foguete escapar da Terra e para esse mesmo foguete escapar da Lua ($V_{esc,t}/V_{esc,l}$).

c) Explique em qual dos dois corpos celestes seria mais fácil colocar um dado foguete em órbita.

Respostas:

Exercícios de aprendizagem:

1) $v_x/v_y = 2/3$

Exercícios de Fixação:

1) (01) +(04) = 05.

[01] Verdadeiro. Cálculo da velocidade de escape:

$$E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_\infty} + E_{p_\infty} \Rightarrow \frac{mv_e^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0 + 0 \Rightarrow \frac{v_e^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

$$\therefore v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

[02] Falso. Do enunciado, temos que $M_T = 9M_M$ e $R_T = 2R_M$, logo:

$$v_{e_M} = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} \text{ e } v_{e_T} = \sqrt{\frac{2G \cdot 9M_M}{2R_M}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}}$$

$$\therefore v_{e_T} > v_{e_M}$$

[04] Verdadeiro. De acordo com a equação do item [01], podemos notar que a velocidade de escape de um corpo não depende de sua massa.

[08] Falso. Cálculo da velocidade orbital:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{cp}} \Rightarrow \frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Portanto, percebemos que a velocidade deve ser proporcional à raiz quadrada do inverso do raio da órbita.

[16] Falso. Neste caso, a espaçonave estaria sujeita apenas à força de atração gravitacional (que não depende da velocidade):

$$F_{\text{grav}} = \frac{GMm}{d^2}$$

2) 16.

Justificando os itens falsos:

[01] Falso. Não existe repulsão quando se fala de forças gravitacionais.

[02] Falso.

$$S = S_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$S = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1^2$$

$$S = 4,9 \text{ m}$$

[04] Falso. $\frac{T^2}{R^3}$

[08] Falso. A velocidade de escape depende sim da massa.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

3) A energia cinética na condição de velocidade de escape deve ser numericamente igual a energia potencial gravitacional. Disto deduz-se que o raio do Buraco Negro será:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GmM}{R} \Rightarrow R = \frac{2GM}{v_e^2}$$

Como a velocidade de escape corresponde a velocidade da luz, c , temos para a massa do buraco negro:

$$M = \frac{Rc^2}{2G}$$

Pelo volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 \text{ (volume máximo)}$$

A densidade mínima do buraco negro será:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3c^2}{8\pi GR^2}$$

4)

a) $V = \sqrt{(2GM/r)}$

b) $V(T)/V(L) = \sqrt{(21)}$

c) Na lua onde há menor velocidade de escape.