Cinemática

Assunto: Cinemática Vetorial

Aula 06 – Lançamentos Oblíquo e Horizontal

Para acompanhar esta aula em vídeo, vá na aba Aulas e clique em Cinemática Vetorial – aula 06

Lançamento Oblíquo e Lançamento Horizontal

Quando um jogador de futebol faz um lançamento, desprezando-se a resistência do ar, a bola irá fazer uma trajetória parabólica até atingir o solo **(figura 1)**. O alcance da bola irá depender não só da velocidade com que o jogador conseguirá imprimir inicialmente a bola, como também, o ângulo θ entre a direção do chute e a horizontal. Tal lançamento é denominado de **Lançamento Oblíquo**. Outro fator que poderia influenciar nesse alcance é a altura da bola em relação ao solo, no momento em que o jogador deu o chute. Um outro fator também, e que não iremos considerar aqui no ensino médio, é o atrito do ar que poderia influenciar na trajejtória da bola, inclusive com efeitos laterais (fazendo com que a bola faça uma curva lateral). Este último efeito será comentado quando estudarmos hidrodinâmica.

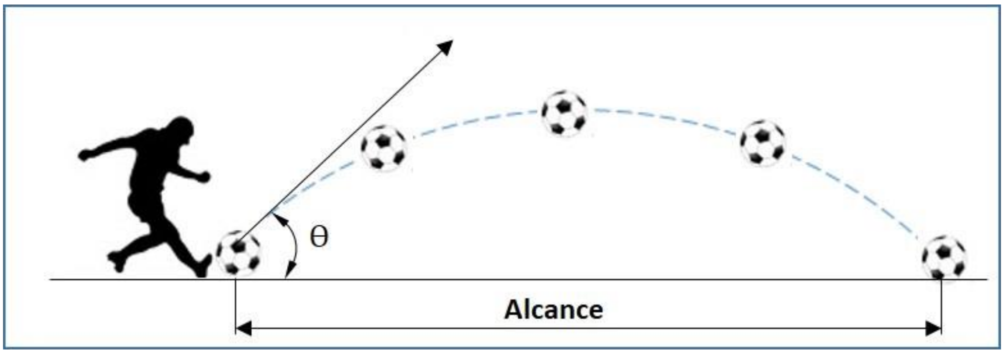


figura 1

Vemos exemplos de lançamentos oblíquos também em partidas de basquete **(figura 2)**, de tênis (**figura 3)**, de vôlei **(figura 4)** e muitos outros esportes.

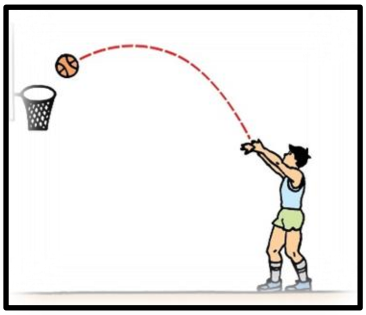


figura 2

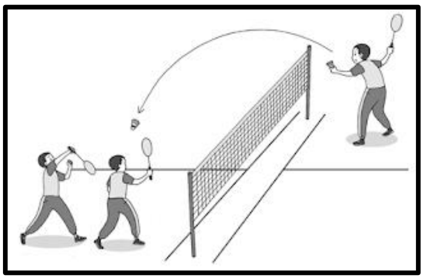


figura 3

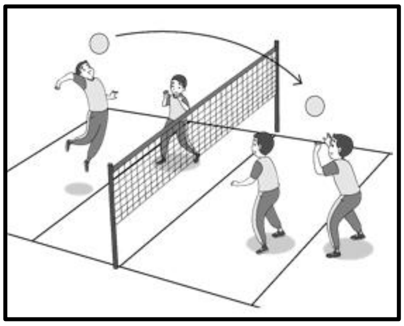


figura 4

Os movimentos descritos acima, podem ser considerados o resultado da composição de dois movimentos simultâneos e independentes: um movimento vertical uniformemente variado, cuja aceleração é a da gravidade, e um movimento horizontal uniforme, pois na horizontal não haverá aceleração.

Vamos, a seguir, analisar separadamente cada um desses movimentos componentes.

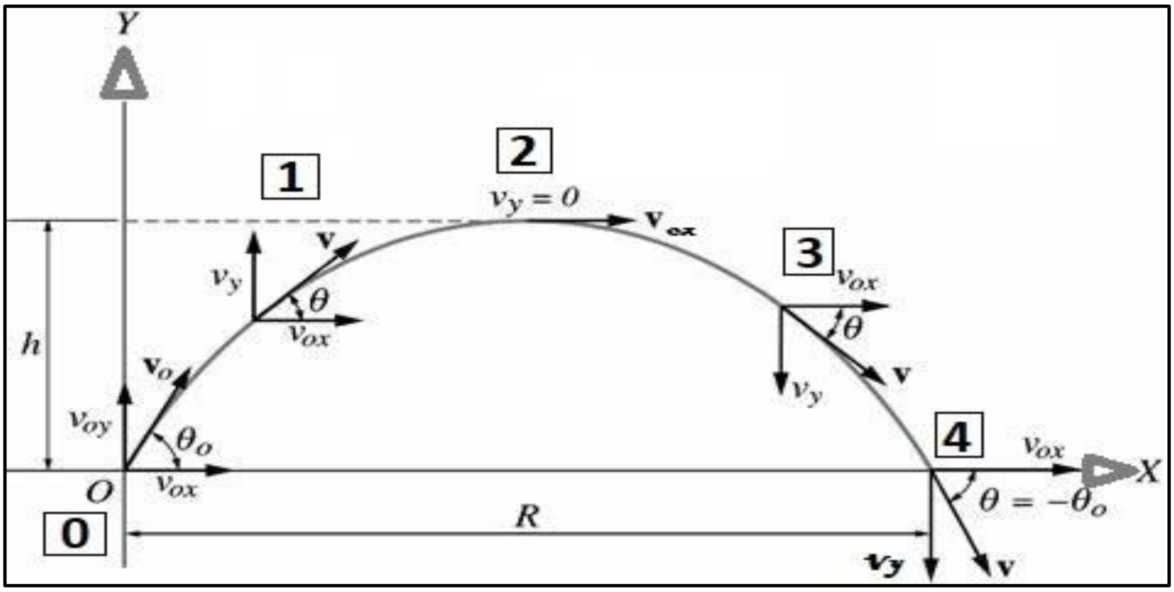


figura 5

Na **figura 5** represento 5 pontos importantes para análise e entendimento de nosso movimento em estudo. No ponto **0** (zero) temos o lançamento do projétil. Ele é lançado com uma velocidade $\mathbf{v_0}$ segundo um ângulo θ_0 com a horizontal. Se projetarmos $\mathbf{v_0}$ no eixo horizontal x, teremos a componente $\mathbf{v_{0x}}$ da velocidade. Esta componente será constante durante todo o movimento, uma vez que estamos desprezando o atrito e, portanto, não ocorrerá uma diminuição da velocidade na horizontal. Sendo assim, para a componente horizontal $\mathbf{v_X}$, poderemos considerar um **movimento uniforme,** cuja velocidade não irá se alterar durante todo o movimento. Veja que nos demais pontos 1, 2, 3 e 4 estão representados a velocidade horizontal como $\mathbf{v_{0x}}$.

$$v_X = v_{0x} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_X = v_0 \,.\, \cos\theta} \quad \left\{ \boxed{\text{Projeção de } v_0 \text{ no eixo-x}} \right\}$$

Agora, ao projetarmos o vetor velocidade $\mathbf{v_0}$ no eixo vertical y, teremos a velocidade $\mathbf{v_{0Y}}$ no ponto 0 (zero).

$$\boxed{v_{0Y} = v_0 \,.\, \text{sen}\,\theta} \quad \left\{ \boxed{\text{Projeção de } v_0 \text{ no eixo-y}} \right\}$$

Porém quando se trabalha no eixo vertical, observamos que a partícula está sob a influência da aceleração da gravidade, ou seja, na subida ela estará perdendo velocidade (retardando) e na descida estará ganhando velocidade (acelerando). Observe na **figura 5** a componente da velocidade vertical em cada ponto. Em 0 (zero) temos a velocidade inicial $\mathbf{v_{0Y}}$**.** Em 1 $\mathbf{v_Y}$ ainda positivo, pois a partícula ainda está subindo. Em 2 $\mathbf{v_Y = 0}$**,** pois a partícula atingiu a altura máxima, portanto, ela estará invertendo o sentido do movimento na vertical. Em 3 a partícula já estará descendo, o que nos dará uma velocidade $\mathbf{v_Y}$ negativa. E o mesmo se repetirá em 4, uma vez que no momento em que a partícula atingir o solo, ela estará descendo.

Para se determinar a velocidade **v** da partícula em qualquer ponto, basta fazer a soma vetorial (ou vetor resultante) das componentes v_X e v_Y no instante considerado. E esta resultante será tangente a trajetória no ponto considerado.

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Analisando tudo que foi exposto acima, temos que no eixo-x (horizontal) estudando a componente da velocidade, na horizontal, temos um movimento uniforme. E no eixo-y teremos um lançamento vertical para cima, cuja componente da velocidade será a velocidade inicial v_{0Y} na vertical.

Estudando o movimento das componentes, teremos condições de determinar para um certo instante a posição x da componente da partícula na horizontal, e a altura y da componente da partícula na vertical. Conhecendo-se estas duas variáveis, teremos a posição P(x,y) da partícula no plano cartesiano em qualquer momento **(figura 6)**.

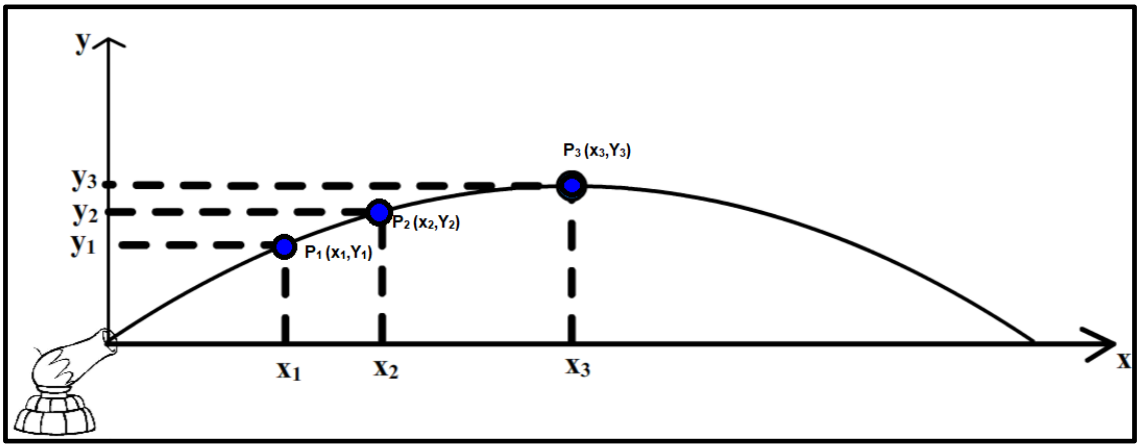


figura 6

Fazendo uma adaptação nas equações teremos:

Equações para lançamentos verticais já estudadas:	Adaptando para o lançamento oblíquo teremos para o eixo-y:
$h = h_0 + v_0 .t + (g/2) . t^2$ $v = v_0 + g . t$ → $v^2 = (v_0)^2 + 2 . g . \Delta h$	$y = y_0 + v_{0y} .t + (g/2) . t^2$ $v_Y = v_{0Y} + g . t$ $v^2_y = (v_{0y})^2 + 2 . g . \Delta y$
Equação horária do movimento uniforme:	**Adaptando para o lançamento oblíquo teremos para o eixo-x:**
$S = s_0 + v . t$ →	$x = x_0 + v_X . t$

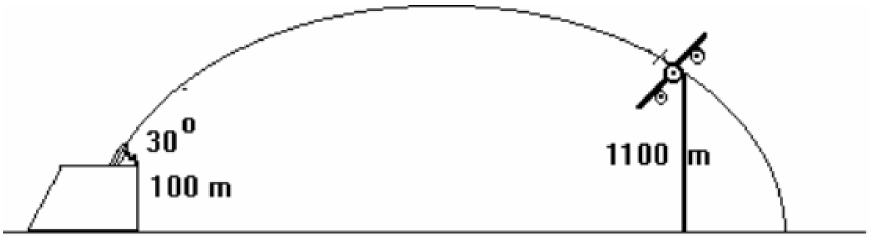
Normalmente, em um problema de lançamento oblíquo, é dado a velocidade inicial de lançamento v_0, a altura do projétil em relação ao solo no instante do lançamento y_0 , o ângulo de lançamento em relação à horizontal θ. Com estes dados você calcula os valores de v_X e V_{0y} para poder substituir nas equações acima. Lembre-se que quando o corpo atinge a altura máxima, $v_Y = 0$. E o alcance horizontal **A**, será o valor de x quando y = 0.

No exercício a seguir será englobado tudo que foi dito acima. Portanto é importantíssimo você entender cada passo do mesmo. Ele está todo resolvido na videoaula a partir de 39' 30".

Exercícios de aprendizagem:

1) Um canhão dispara um projétil que parte com velocidade de 50 m/s. Nesse local $g = 10\ m/s^2$ e o canhão forma 45º com a horizontal. Pergunta-se:
a) qual o módulo da componente horizontal da velocidade;
b) qual o módulo da componente vertical da velocidade para t = 0;
c) em que instante $v_Y = 0$ (instante em que ele alcança a altura máxima);
d) qual o tempo, a partir do lançamento, que o projétil leva para retornar ao chão;
e) qual o módulo de sua velocidade nesse instante;
f) qual a altura máxima atingida pelo projétil;
g) a que distância o projétil cai do canhão?

2) Um canhão dispara um projétil do alto de uma elevação de 100 metros de altura, segundo um ângulo de 30º com a horizontal, com velocidade de 300 m/s, conforme a figura.



Admitindo g = 10 m/s², determine o tempo que o projétil leva para atingir um alvo localizado a 1100 metros de altura, conforme indica a figura. Faça $\sqrt{3}=1,7$.

Lançamento Horizontal

O **lançamento horizontal** é um caso particular do lançamento oblíquo. A diferença entre os dois está no ângulo de lançamento que será, no caso do horizontal, sempre zero.

Observe na **figura 7,** temos um garoto lançando uma bola horizontalmente (para frente paralelamente ao solo). É fácil perceber que a bola já parte da altura máxima e com uma velocidade que será a própria componente $\mathbf{v_X}$ que estudamos no lançamento oblíquo. Matematicamente isso acontece devido ao ângulo de lançamento ser 0º. Como cos 0º = 1, teremos na equação $v_X = v_0 \cdot \cos\theta$ que $\mathbf{v_X = v_0}$

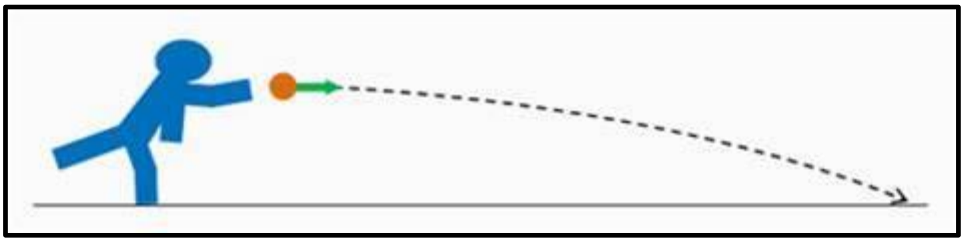


figura 7

É interessante observar também, que a velocidade inicial $\mathbf{v_{0Y}}$ será zero, uma vez que o sen 0º = 0. Ou seja, inicialmente o corpo não terá velocidade vertical. Como existe a aceleração da gravidade, e que é constante, o corpo irá adquirir velocidade vertical no decorrer do tempo, porém, é bom reforçar que a velocidade horizontal $\mathbf{v_X}$ continuará constante.

Fazendo uma adaptação nas equações teremos:

No lançamento oblíquo tínhamos para o eixo-y:	No lançamento horizontal teremos que $v_{0Y} = 0$.
$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + (g/2) \cdot t^2$ $v_Y = v_{0Y} + g \cdot t$ $v^2_y = (v_{0y})^2 + 2 \cdot g \cdot \Delta y$	$y = y_0 + (g/2) \cdot t^2$ $v_Y = g \cdot t$ $v^2_y = 2 \cdot g \cdot \Delta y$
E para o eixo-x:	**E para o eixo-x:**
$x = x_0 + v_X \cdot t$	$x = x_0 + v_X \cdot t$ (onde $v_X = v_0$)

Obs. 1) Se for pedido a velocidade do projétil em um certo instante, o procedimento será análogo ao lançamento oblíquo, ou seja, a soma vetorial de v_x e v_y.

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

2) Eu, particularmente, prefiro continuar adotando no eixo coordenado y, positivo para cima. Isso facilitará na montagem do problema, uma vez que a altura de lançamento será o próprio y_0. Então muita atenção, pois neste caso a gravidade continuará tendo um sinal negativo.

Exercícios de aprendizagem:

Um projétil é lançado horizontalmente com velocidade inicial de 5 m/s de uma altura h = 180 m. Considere a resistência do ar desprezível e adote g = 10 m/s^2. Este enunciado refere-se aos problemas 3 ao 5.

3) No instante t = 5s as coordenadas X e Y, que determinam as posições do projétil, valem, em unidades do S.I. respectivamente:

a) 10 e 45 b) 25 e 55 c) 10 e 125 d) 25 e 80 e) 50 e 180

4) No instante 5s, o projétil da questão anterior se encontra a uma distância do solo igual a:

a) 25 m b) 50 m c) 55 m d) 70 m e) 125 m

5) A velocidade do projétil, no instante 0,5 s, tem módulo e direção, respectivamente iguais a:

a) 7 m/s e 45º b) 7 m/s e 30º c) 7 m/s e 60º d) 5 m/s e 30º e) 5 m/s e 60º

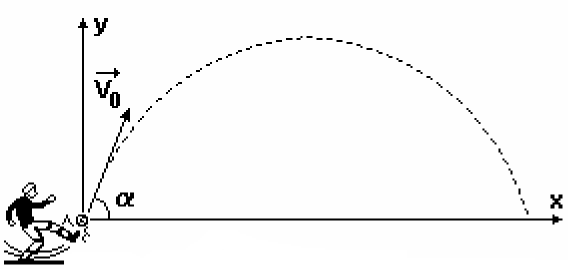
6) Um avião bombardeiro está voando a 2 000 m de altura quando solta uma bomba. Se a bomba cai a 1 000 m da vertical em que foi lançada, qual o módulo da velocidade do avião? Adote g = 10 m/s^2.

Exercícios de Fixação:

1) Um corpo é lançado do solo para cima, segundo um ângulo de 60º com a horizontal com velocidade de 400 m/s. Admitindo g = 10 m/s^2 e $\sqrt{3}$ 1,7 ; pede-se:

a) o tempo que o corpo leva para atingir a altura máxima em relação ao solo;
b) a altura máxima atingida;
c) o tempo gasto para atingir o solo;
d) o alcance máximo do corpo;
e) a velocidade do corpo no instante 8 segundos;
f) a equação da trajetória do corpo.

2) Durante uma partida de futebol, um zagueiro rebate uma bola na sua defesa. Ela sai de seu pé obliquamente, formando com a direção horizontal um ângulo α ($sen\alpha \cong 0{,}8$ e $\cos\alpha \cong 0{,}6$), e com velocidade inicial v_0 = 30 m/s, conforme a figura a seguir. Considere g = 10 m/s^2.



a) Calcule as componentes da velocidade inicial nas direções **X** e **Y**, ou seja, v_{0x} e v_{0y}.

b) Calcule o instante em que a bola atinge a altura máxima. A seguir, determine qual o valor desta altura máxima atingida pela bola, medida a partir do nível horizontal.

c) Calcule o alcance da bola, ou seja, a distância que a bola toca o solo pela primeira vez.

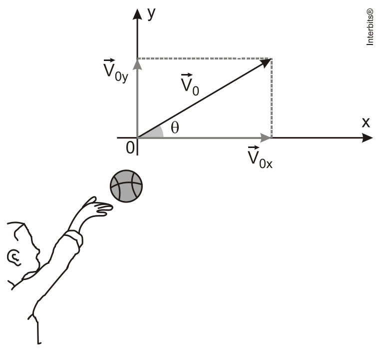
3) (Pucrj) Um projétil é lançado com uma velocidade escalar inicial de 20 m/s com uma inclinação de 30° com a horizontal, estando inicialmente a uma altura de 5,0 m em relação ao solo. A altura máxima que o projétil atinge, em relação ao solo, medida em metros, é: (Considere a aceleração da gravidade g = 10 m/s^2)

a) 5,0 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

4) Uma pedra é lançada para cima a partir do topo e da borda de um edifício de 16,8 m de altura a uma velocidade inicial v_0 = 10 m/s e faz um ângulo de 53,1° com a horizontal. A pedra sobe e em seguida desce em direção ao solo. O tempo, em segundos, para que a mesma chegue ao solo é : (Dados: $v_0 = 10 m/s; \theta = 53,1°; sen\theta = 0,8; cos\theta = 0,6; h = 16,8 m.$)

a) 2,8. b) 2,1. c) 2,0. d) 1,2.

5) (Pucsp) Dois amigos, Berstáquio e Protásio, distam de 25,5 m. Berstáquio lança obliquamente uma bola para Protásio que, partindo do repouso, desloca-se ao encontro da bola para segurá-la. No instante do lançamento, a direção da bola lançada por Berstáquio formava um ângulo θ com a horizontal, o que permitiu que ela alcançasse, em relação ao ponto de lançamento, a altura máxima de 11,25 m e uma velocidade de 8 m/s nessa posição. Desprezando o atrito da bola com o ar e adotando g = 10m/s^2, podemos afirmar que a aceleração de Protásio, suposta constante, para que ele consiga pegar a bola no mesmo nível do lançamento deve ser de



a) $\frac{1}{2} m/s^2$ b) $\frac{1}{3} m/s^2$ c) $\frac{1}{4} m/s^2$ d) $\frac{1}{5} m/s^2$ e) $\frac{1}{10} m/s^2$

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Três bolas − X, Y e Z − são lançadas da borda de uma mesa, com velocidades iniciais paralelas ao solo e mesma direção e sentido. A tabela abaixo mostra as magnitudes das massas e das velocidades iniciais das bolas.

Bolas	**Massa (g)**	**Velocidade inicial (m/s)**
X	5	20
Y	5	10
Z	10	8

6) (Uerj) As relações entre os respectivos tempos de queda t_x , t_y e t_z das bolas X, Y e Z estão apresentadas em:

a) $t_x < t_y < t_z$
b) $t_y < t_z < t_x$

c) $t_z < t_y < t_x$
d) $t_y = t_x = t_z$

7) (Uerj) As relações entre os respectivos alcances horizontais A_x, A_y e A_z das bolas X, Y e Z, com relação à borda da mesa, estão apresentadas em:

a) $A_x < A_y < A_z$
b) $A_y = A_x = A_z$
c) $A_z < A_y < A_x$
d) $A_y < A_z < A_x$

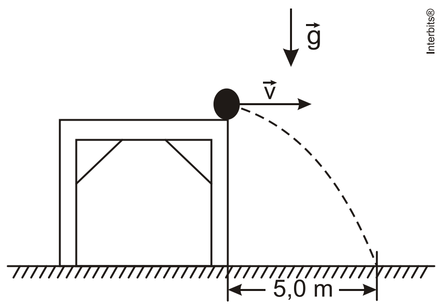
8) (Fuvest) Uma menina, segurando uma bola de tênis, corre com velocidade constante, de módulo igual a 10,8 km/h, em trajetória retilínea, numa quadra plana e horizontal. Num certo instante, a menina, com o braço esticado horizontalmente ao lado do corpo, sem alterar o seu estado de movimento, solta a bola, que leva 0,5 s para atingir o solo. As distâncias s_m e s_b percorridas, respectivamente, pela menina e pela bola, na direção horizontal, entre o instante em que a menina soltou a bola (t = 0 s) e o instante t = 0,5 s, valem:

NOTE E ADOTE
Desconsiderar efeitos dissipativos.
a) s_m = 1,25 m e s_b = 0 m.
b) s_m = 1,25 m e s_b = 1,50 m.
c) s_m = 1,50 m e s_b = 0 m.
d) s_m = 1,50 m e s_b = 1,25 m.
e) s_m = 1,50 m e s_b = 1,50 m.

9) (PUC-SP) – Um garoto parado num plano horizontal, a 3m de uma parede, chuta uma bola, comunicando-lhe velocidade de 10 m/s, de tal modo que sua direção forma, com a horizontal, um ângulo de 45º. A aceleração da gravidade no local é 10 m/s^2 e a resistência do ar pode ser desprezada. Determine:

a) o instante em que a bola atinge a parede;
b) a altura do ponto da parede atingido pela bola;
c) a velocidade da bola no instante do impacto.

10) (Espcex (Aman)) Uma esfera é lançada com velocidade horizontal constante de módulo v = 5 m/s da borda de uma mesa horizontal. Ela atinge o solo num ponto situado a 5 m do pé da mesa conforme o desenho a seguir.



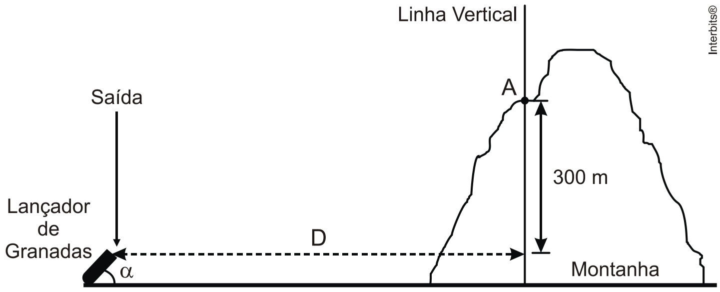
desenho ilustrativo - fora de escala

Desprezando a resistência do ar, o módulo da velocidade com que a esfera atinge o solo é de:

Dado: Aceleração da gravidade: g=10 m/s^2
a) 4 m / s
b) 5 m / s
c) $5\sqrt{2}$ m / s

d) $6\sqrt{2}\ m/s$
e) $5\sqrt{5}\ m/s$

11) (Espcex (Aman)) Um lançador de granadas deve ser posicionado a uma distância D da linha vertical que passa por um ponto A. Este ponto está localizado em uma montanha a $300\ m$ de altura em relação à extremidade de saída da granada, conforme o desenho abaixo.



A velocidade da granada, ao sair do lançador, é de $100\ m/s$ e forma um ângulo "α" com a horizontal; a aceleração da gravidade é igual a $10\ m/s^2$ e todos os atritos são desprezíveis. Para que a granada atinja o ponto A, somente após a sua passagem pelo ponto de maior altura possível de ser atingido por ela, a distância D deve ser de:
Dados: $\cos \pm = 0,6;\ \ \text{sen} \pm = 0,8.$

a) 240 m
b) 360 m
c) 480 m
d) 600 m
e) 960 m

Respostas:

Exercícios de aprendizagem:

1) $a) v_x = 25\sqrt{2}\ m/s \quad b) v_y = 25\sqrt{2}\ m/s \ c) t = 2,5\sqrt{2}\ s \quad d) t = 5\sqrt{2}\ s \quad e) v = 50 m/s$

$f) y = 62,5 m \quad g) A = 250 m$

2) t = 20 s 3) b 4) c 5) a 6) t = 20 s e a velocidade 50 m/s

Fixação:

1) a) t = 34 s b) y = 5780 m c) t = 68 s d) x = 13.600m e) v ≅ 328 m/s

f) *y = (17/10) x - (5x² / 40 000)*

2) a) Vx = 18 m/s Voy = 24 m/s b) 2,4 s e 28,8 m c) 86,4m 3) B 4) A 5) B 6) D

7) C 8) E 9) a) 3/(5√2) s b) 2,1 m c) 7,6 m 10) E 11) D