Cinemática

Assunto: Cinemática Vetorial

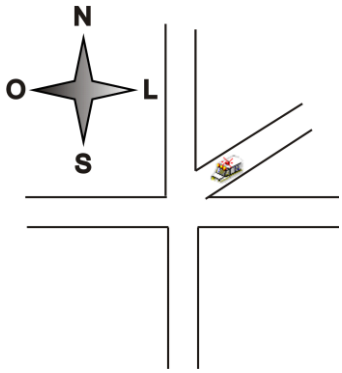
Aula 01 – Vetores

Para acompanhar esta aula em vídeo, vá na aba Aulas e clique em Cinemática Vetorial – aula 01

Vetores

Grandezas como volume, tempo, massa e temperatura ficam perfeitamente definidas por um número e respectiva unidade de medida. Mas há casos em que necessitamos de mais elementos.

Por exemplo: você se encontra num cruzamento, como o ilustrado na figura ao lado.
Qual a direção a tomar? **Norte – Sul? ou Leste – Oeste?**
Ou ainda, qual o sentido a tomar? **Para o norte ou para o Sul? Para Leste ou para Oeste?**



Grandezas escalares são aquelas que ficam perfeitamente definidas quando se conhecem o número e a unidade de medida.

Exemplos: Hoje a temperatura é de 20ºC.
Irei comprar 1 kg de banana.

Nesses 2 exemplos, não há a necessidade de acrescentar mais nenhuma informação. Fica perfeitamente entendido o que quero dizer. Portanto **temperatura e massa, são exemplos de grandezas escalares.**

Grandezas vetoriais são aquelas que, além do número e da unidade de medida, necessitam de direção e sentido para a perfeita caracterização.

Como exemplo o **deslocamento** dado anexo a figura acima. Qual **direção** tomar? E qual **sentido**?

Para se representar as grandezas vetoriais tomamos um segmento orientado de modo que:

a) o comprimento do segmento representa a quantidade denominada intensidade ou módulo.
b) a reta que contém o segmento indica a direção.
c) e a orientação do segmento indica o sentido.

Esse segmento orientado denomina-se **vetor**, que é o número associado à direção e sentido, que representa geometricamente a grandeza vetorial.

$\vec{v}$ **:** lê-se vetor v

$\vec{v}$ { intensidade ou mo′dulo: 5 unidades
direção: horizontal
sentido: da esquerda para a direita

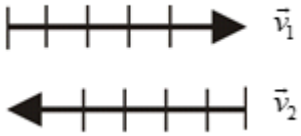
$\vec{F}$: lê-se vetor F

$$\vec{F}\begin{cases}\text{intensidade ou mo′dulo: 3 unidades}\\ \text{direção: vertical}\\ \text{sentido: de baixo para cima}\end{cases}$$

Quando se deseja apenas a intensidade, ou módulo do vetor, representamos da seguinte forma:

$$\left|\vec{F}\right| = F = \text{intensidade ou mo´dulo do } \vec{F}.$$

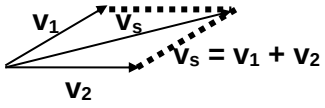
Vetores opostos, são vetores que têm a mesma intensidade, a mesma direção, porém sentidos opostos (contrários).

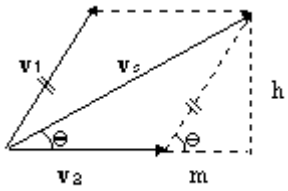


$$\begin{cases}\vec{v}_1 = -\vec{v}_2\end{cases}$$

Operações com vetores:

a) Soma de dois vetores:





1º) Dados dois vetores **v1** e **v2**, o vetor soma **vs** (ou resultante) é obtido pela **Regra do paralelogramo.**

Para o cálculo do valor do vetor soma **vs** aplicaremos conhecimentos de trigonometria.

$v_s^2 = h^2 + (v_2 + m)^2$ lembre que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e que $h = v_1 \operatorname{sen}\theta$

$v_s^2 = v_1^2 \operatorname{sen}^2\theta + (v_2^2 + 2\, v_2\, m + m^2)$ mas $m = v_1 \cos\theta$

$v_s^2 = v_1^2 \operatorname{sen}^2\theta + v_2^2 + 2\, v_2 v_1 \cos\theta + v_1^2 \cos^2\theta$

$v_s^2 = v_1^2 (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\theta$ lembrar que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$v_s^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\, v_1 v_2 \cos\theta$

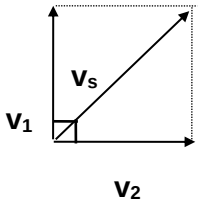
$v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\theta}$

Portanto para se calcular o valor do módulo do vetor soma ou resultante, basta usar:

$$S = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\theta}$$

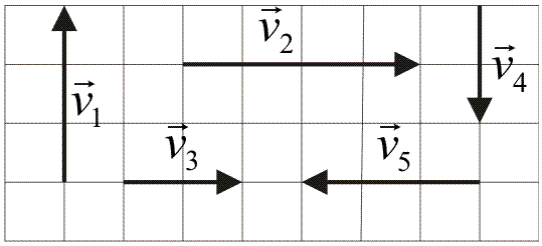
onde θ é o ângulo entre os 2 vetores.

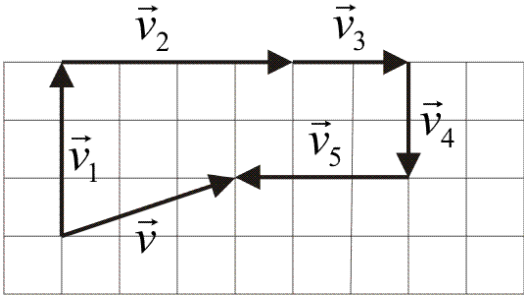
Caso particular: $\theta = 90^o$



$\cos 90^o = 0 \qquad v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

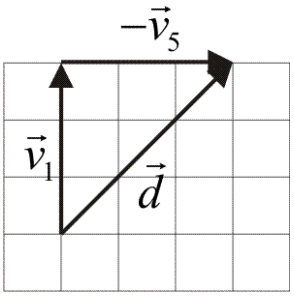
2º) **Regra do polígono**: Dados vários vetores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots$, para se determinar a sua resultante procede-se da seguinte forma:





Tornando-se sucessivamente consecutivos os vetores dados, forma-se uma linha poligonal. A resultante é o vetor de origem na origem do primeiro e extremidade na extremidade do último. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 = \vec{v}$. Observe também que geometricamente seria fácil calcular o valor do vetor resultante, construindo-se um triângulo retângulo a partir dele e usando o teorema de Pitágoras para se calcular seu valor.

b) Diferença de dois vetores: A diferença de vetores é determinada pela regra da adição de vetores, pois:
$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$. Basta adicionar ao primeiro vetor, o oposto do segundo vetor. Suponha que na figura mais acima eu quisesse fazer a operação $\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_5$. Geometricamente teríamos a representação ao lado:

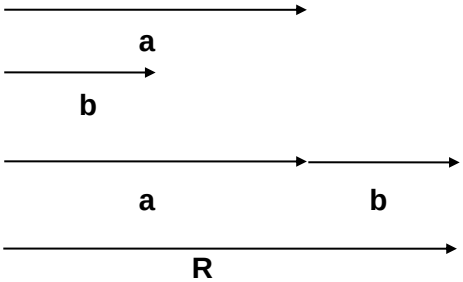


Quando se usa a regra do paralelogramo podemos calcular o valor do vetor diferença aplicando a Lei dos cossenos: Neste caso será:

$$D = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2.v_1.v_2.\cos\theta}$$

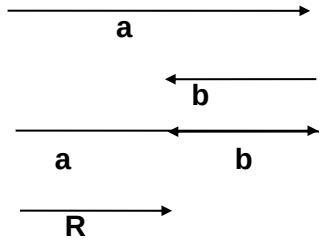
onde θ é o ângulo entre os 2 vetores.

Obs: a) Quando dois vetores tiverem a mesma direção e o mesmo sentido ($\theta = 0^o$) , o vetor resultante será:



Intensidade: R = a + b
Direção: mesma de **a** e **b**
Sentido: mesmo de **a** e **b**

b) Quando dois vetores tiverem a mesma direção e os sentidos opostos ($\theta = 180^o$) , o vetor resultante será:



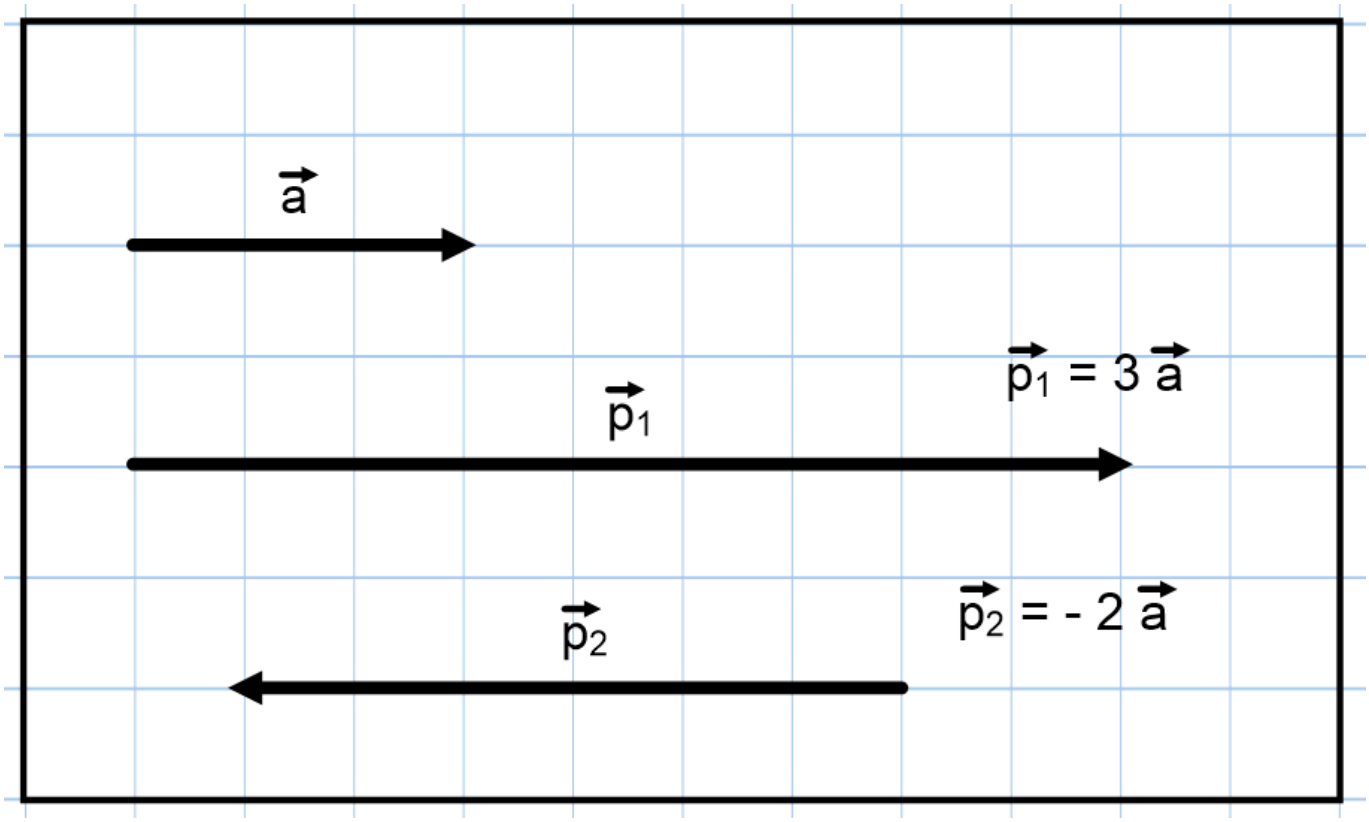
Intensidade: R = a - b
Direção: mesma de **a** e **b**
Sentido: mesmo sentido do vetor de maior intensidade.

Multiplicação de um vetor por um escalar:

O produto de um vetor $\vec{a}$ por um número real k (escalar) é o vetor $\vec{p}$ que representa as seguintes características:

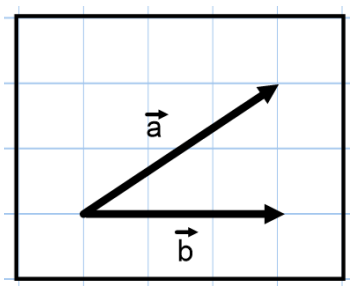
- O módulo é dado por |Ka|;
- A direção é a mesma do vetor $\vec{a}$;
- Com relação ao sentido, temos duas possibilidades, dependendo se k > 0, o vetor $\vec{p}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{a}$, e no segundo caso k < 0, o vetor $\vec{p}$ terá sentido contrário ao do vetor $\vec{a}$.

Observe o exemplo: Dado o vetor a, foi representado os vetores p_1 (três vezes maior) e p_2 (duas vezes maior mas de sentido contrário).

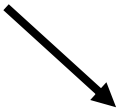


Exercícios de aprendizagem:

1) São dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Assinale o vetor que melhor representa a soma $(\vec{s} = \vec{a} + \vec{b})$.



a)

b) 

c)

d)

2) Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ do exemplo anterior, assinale o vetor que melhor representa a diferença $(\vec{d} = \vec{a} - \vec{b})$.

a)

b)

c)

d)

3) Qual o valor do vetor soma de dois vetores perpendiculares entre si e cujos módulos são 6 e 8 unidades?

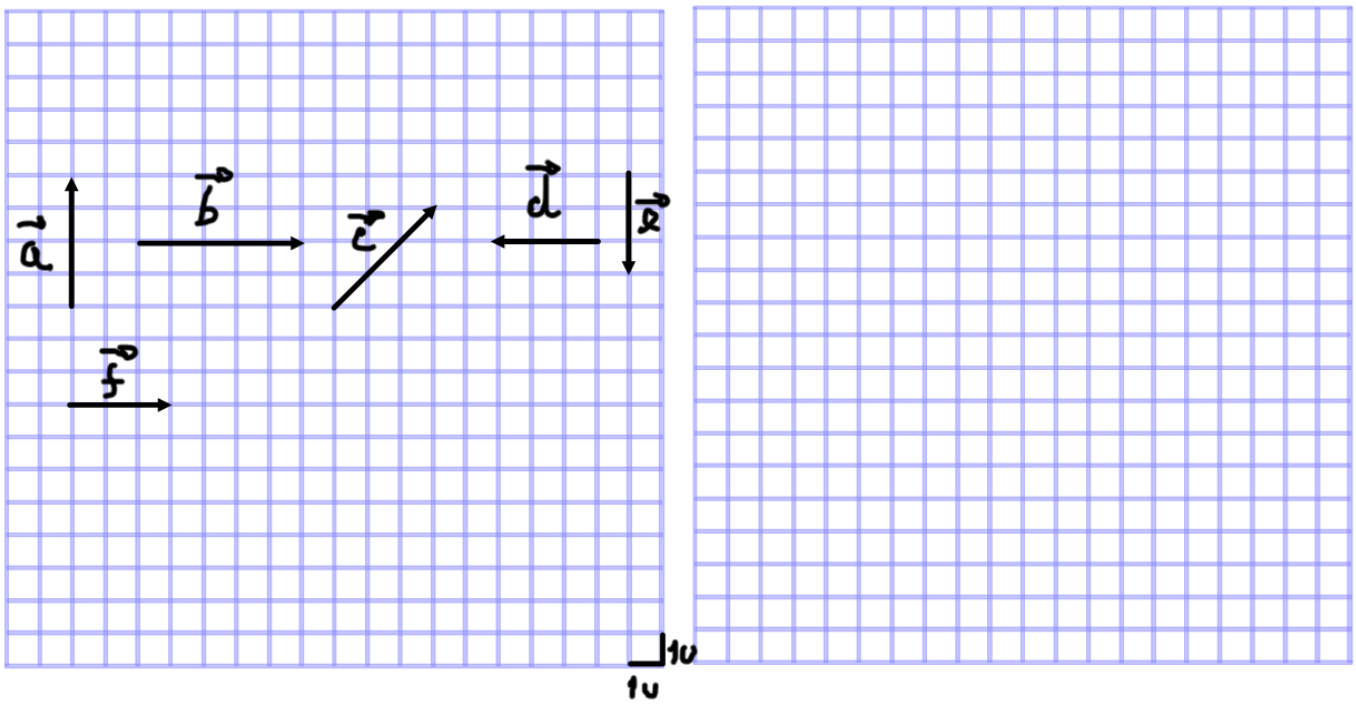
a) 7u
b) 10u
c) 12u
d) 14u

4) Represente a soma vetorial na tabela dada e dê o valor do vetor resultante em cada caso a seguir:

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ →

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{f}$ →

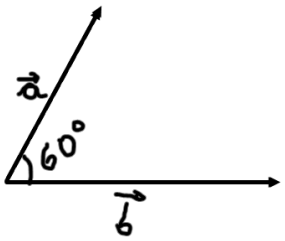
$\vec{s} = \vec{b} + 2\vec{c} - 2\vec{d}$ →



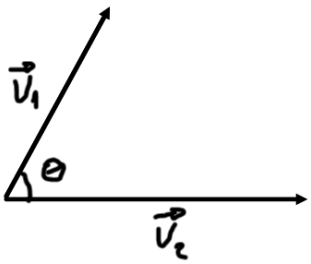
5) Dado o diagrama vetorial, trace o vetor resultante e dê o seu valor:

$a = 3\,u$

$b = 4\,u$



6) Dê o valor da diferença entre dois vetores que formam entre si um ângulo de 60º e cujo módulo de cada um vale respectivamente 3u e 4u.

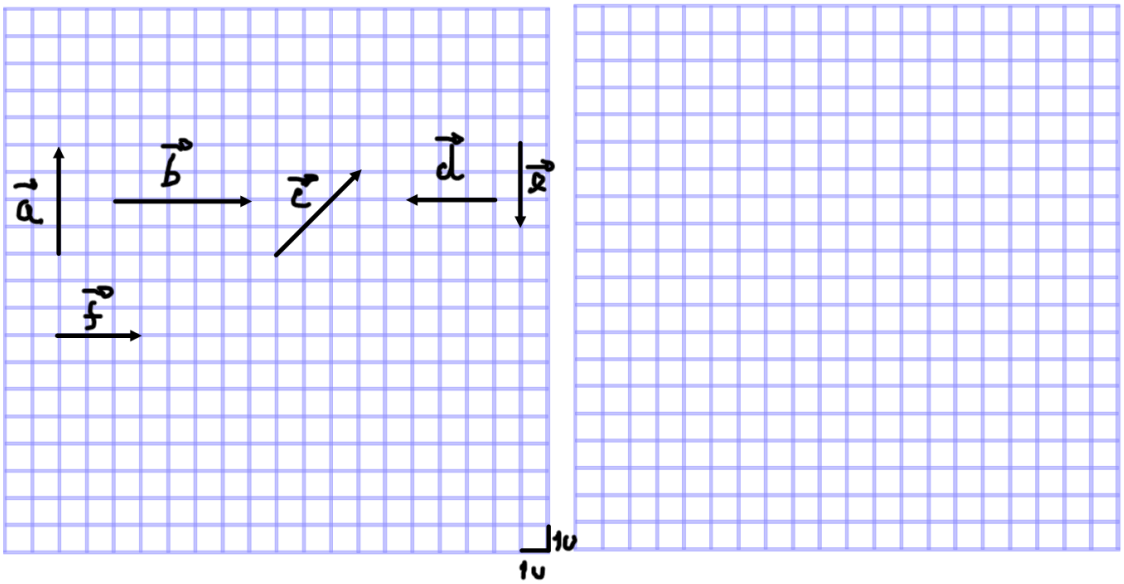


7) Mariana anda 40 metros para o leste e certa distância para o norte, de tal forma que fica afastada 50 metros do ponto de partida. Determine a distância percorrida para o norte.

8) Considere dois vetores. Um cujo módulo seja 30 e outro cujo módulo seja 40. Determine como os vetores podem ser combinados para que a soma tenha módulo 70.

Exercícios de Fixação:

1) Represente a soma vetorial pedida e dê o valor do vetor resultante em cada caso:



$\vec{s}_1 = \vec{c} + \vec{e}$ →

$\vec{s}_2 = \vec{c} + \vec{e} - \vec{f}$ →

$\vec{s}_3 = \vec{b} + \vec{f}$ →

$\vec{s}_4 = \vec{b} - \vec{f}$ →

2) Os deslocamentos sucessivos efetuados por um veículo, quando se movimenta de um Ponto A para outro B, foram: 40 Km para o norte, 40 Km para o leste e 10 Km para o sul. Para retornar de B para A, qual a menor distância a ser percorrida?

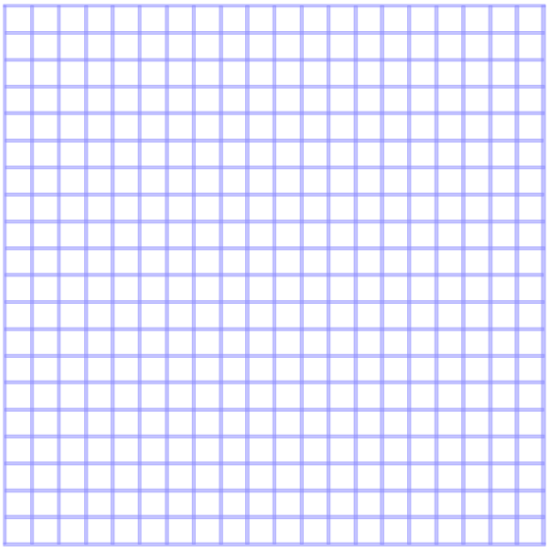
3) Dois vetores têm módulos 4 m/s e 5 m/s e formam entre si um ângulo de 60º. A razão entre o módulo do vetor soma e o módulo do vetor diferença é aproximadamente:
a) 2,3 b) 1,7 c) 3 d) 4,2

4) Considere dois vetores: um cujo módulo seja 30 e outro cujo módulo seja 40. Determine como os vetores podem ser combinados para que a soma tenha módulo: a) 70 b) 10 c) 50

5) (Uel) Em uma brincadeira de caça ao tesouro, o mapa diz que para chegar ao local onde a arca de ouro está enterrada, deve-se, primeiramente, dar dez passos na direção norte, depois doze passos para a direção leste, em seguida, sete passos para o sul, e finalmente oito passos para oeste.

A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Desenhe a trajetória descrita no mapa, usando um diagrama de vetores.



b) Se um caçador de tesouro caminhasse em linha reta, desde o ponto de partida até o ponto de chegada, quantos passos ele daria?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos envolvidos na resolução deste item.

6) (Eear) A adição de dois vetores de mesma direção e mesmo sentido resulta num vetor cujo módulo vale 8. Quando estes vetores são colocados perpendicularmente, entre si, o módulo do vetor resultante vale $4\sqrt{2}$. Portanto, os valores dos módulos destes vetores são:

a) 1 e 7.
b) 2 e 6.
c) 3 e 5.
d) 4 e 4.

Respostas:

Aprendizagem:

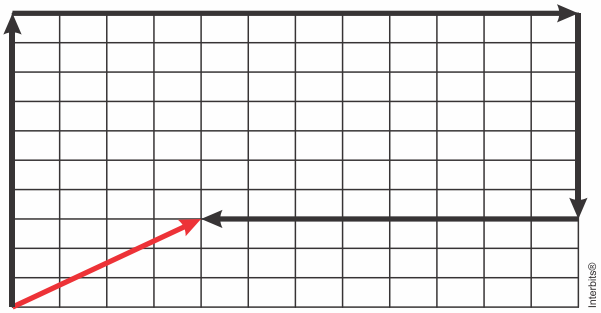
1) d 2) c 3) b 4) **a)** $\sqrt{41}\,u$ **b)** $r = 5u$ **c)** $s = \sqrt{325} \rightarrow s \cong 18u$ **5)** $s = \sqrt{37}\,u$ 6) $s = \sqrt{13}\,u$

7) d = 30 m 8) θ = 0º (paralelos)

Fixação:

1) $S_1 = 3$, $S_2 = 0$, $S_3 = 8$, $S_4 = 2$ 2) 50 km 3) b 4) a) $\theta = 0^0$ b) θ = 180º c) θ = 90º

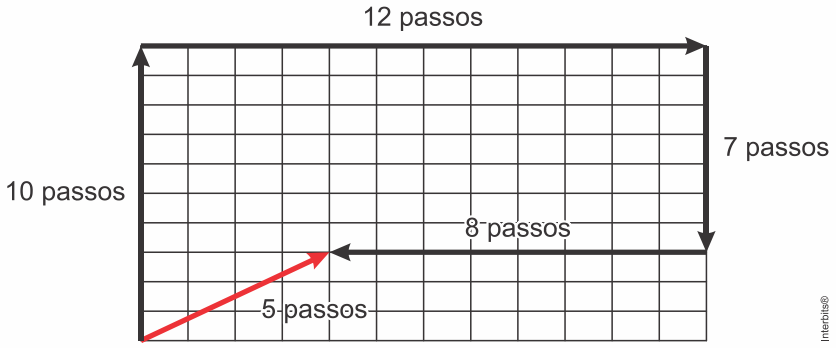
5) Trajetória descrita em quadrículas, cada uma contendo um passo de distância:



a) Os vetores pretos representam os passos dados nas direções sugeridas, sendo o ponto de partida à esquerda do diagrama, sendo 10 passos no sentido norte, doze no sentido leste, sete para o sul e oito para oeste.

b) Em linha reta do ponto de partida até o ponto de chegada está representado no diagrama com a cor vermelha e representa a soma vetorial de todos os passos dados e representados em preto, ou seja, o vetor resultante. O seu cálculo é realizado usando o teorema de Pitágoras entre o início e o final do trajeto:

$R = \sqrt{4^2 + 3^2} \therefore R = 5$ passos.



6) [D]

Sendo v e w os módulos dos vetores, temos:

$$\begin{cases} v + w = 8 \\ \sqrt{v^2 + w^2} = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 8 - w \\ v^2 = 32 - w^2 \end{cases}$$

$$(8 - w)^2 = 32 - w^2 \Rightarrow 64 - 16w + w^2 = 32 - w^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2w^2 - 16w + 32 = 0 \Rightarrow w^2 - 8w + 16 = 0$$

$$\therefore w = 4$$

$$v = 8 - 4$$

$$\therefore v = 4$$