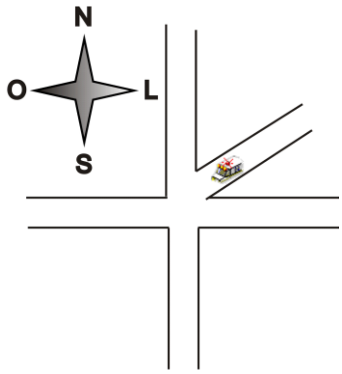
UNIDADE IV: Cinemática Vetorial

4.1- Vetores:



Grandezas como volume, tempo, massa e temperatura ficam perfeitamente definidas por um número e respectiva unidade de medida. Mas há casos em que necessitamos de mais elementos, por exemplo: você se encontra num cruzamento, como o ilustrado na figura.

Qual a direção a tomar? **Norte – Sul? ou Leste – Oeste?**

Ou ainda, qual o sentido a tomar? **Para o norte ou para o Sul? Para Leste ou para Oeste?**

Grandezas escalares são aquelas que ficam perfeitamente definidas quando se conhecem o número e a unidade de medida.

Grandezas vetoriais são aquelas que, além do número e da unidade de medida, necessitam de direção e sentido para a perfeita caracterização.

Para se representar as grandezas vetoriais tomamos um segmento orientado de modo que:

a) o comprimento do segmento representa a quantidade denominada intensidade ou módulo.
b) a reta que contém o segmento indica a direção.
c) e a orientação do segmento indica o sentido.

Esse segmento orientado denomina-se **vetor**, que é o número associado à direção e sentido, que representa geometricamente a grandeza vetorial.

$\vec{v}$ **:** lê-se vetor v

$$\vec{v}\begin{cases}\text{intensidade ou mo′dulo: 5 unidades}\\ \text{direção: horizontal}\\ \text{sentido: da esquerda para a direita}\end{cases}$$

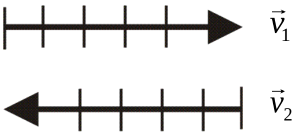
$\vec{F}$ **:** lê-se vetor F

$$\vec{F}\begin{cases}\text{intensidade ou mo′dulo: 3 unidades}\\ \text{direção: vertical}\\ \text{sentido: de baixo para cima}\end{cases}$$

Quando se deseja apenas a intensidade ou módulo do vetor representamos da seguinte forma:

$$|\vec{F}| = F = \text{intensidade ou mo´dulo do } \vec{F}.$$

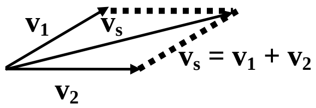
Vetores opostos são vetores que têm a mesma intensidade, a mesma direção, porém sentidos opostos (contrários).



$$\{\ \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

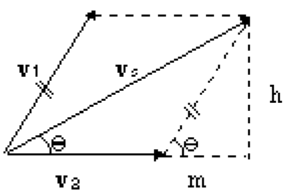
- Operações com vetores:

a) Soma de dois vetores:



1º) Dados dois vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, o vetor soma $\mathbf{v_s}$ (ou resultante) é obtido pela **Regra do paralelogramo.**

Para o cálculo do valor do vetor soma $\mathbf{v_s}$ aplicaremos conhecimentos de trigonometria.



$v_s^2 = h^2 + (v_2 + m)^2$ lembre que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e que $h = v_1 \text{ sen } \theta$

$v_s^2 = v_1^2 \text{ sen}^2 \theta + (v_2^2 + 2 v_2 m + m^2)$ lembrar que $m = v_1 \cos\theta$

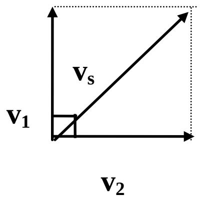
$v_s^2 = v_1^2 \text{ sen}^2 \theta + v_2^2 + 2 v_2 v_1 \cos\theta + v_1^2 \cos^2 \theta$

$v_s^2 = v_1^2 (\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\theta$ lembrar que $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$v_s^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\theta$

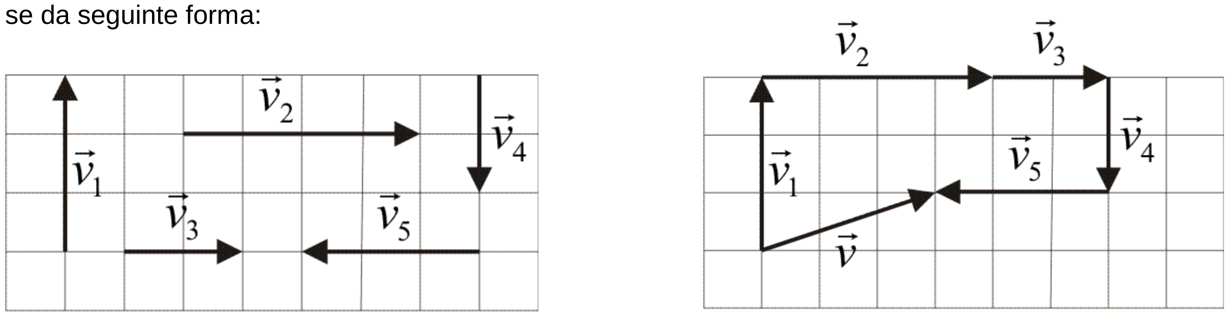
$$v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\theta}$$

Caso particular: θ = 90º



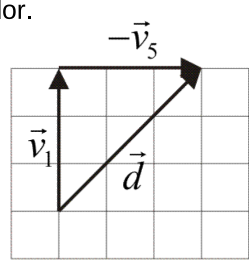
cos 90º = 0 $\quad v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

2º) Regra do polígono: Dados vários vetores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, ...$, para se determinar a sua resultante procede-se da seguinte forma:



Tornando-se sucessivamente consecutivos os vetores dados, forma-se uma linha poligonal. A resultante é o vetor de origem na origem do primeiro e extremidade na extremidade do último. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 = \vec{v}$. Observe também que geometricamente seria fácil calcular o valor do vetor resultante, construindo-se um triângulo retângulo a partir dele e usando o teorema de Pitágoras para se calcular seu valor.

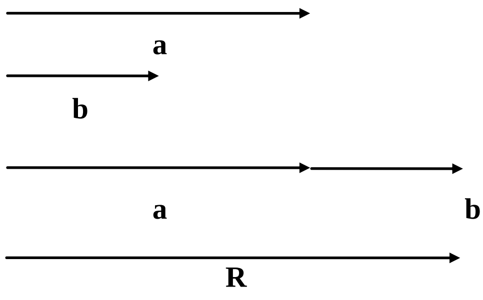
b) Diferença de dois vetores: A diferença de vetores é determinada pela regra da adição de vetores, pois:
$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$. Basta adicionar ao primeiro vetor, o oposto do segundo vetor. Suponha que na figura mais acima eu quisesse fazer a operação $\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_5$. Geometricamente teríamos a representação ao lado:



Quando se usa a regra do paralelogramo podemos calcular o valor do vetor diferença aplicando a Lei dos co-senos: Neste caso será:

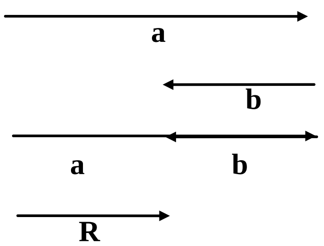
$$\boxed{D = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2.v_1.v_2.\cos\theta}}$$

Obs: a) Quando dois vetores tiverem a mesma direção e o mesmo sentido (θ = 0º) , o vetor resultante será:



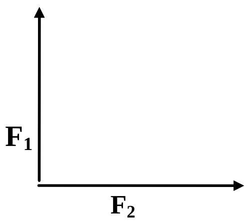
Intensidade: R = a + b
Direção: mesma de **a** e **b**
Sentido: mesmo de **a** e **b**

c) Quando dois vetores tiverem a mesma direção e os sentidos opostos (θ = 180º) , o vetor resultante será:



Intensidade: R = a **-** b
Direção: mesma de **a** e **b**
Sentido: mesmo sentido do vetor de maior intensidade.

EXEMPLO 1: Sejam os vetores $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ de valores iguais a 10 uv e 5 uv, respectivamente, cuja representação vetorial se encontra abaixo. Trace a resultante **R** e dê o seu valor.

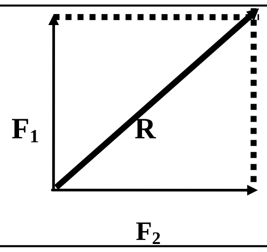


Solução: $R^2 = F_1^2 + F_2^2$

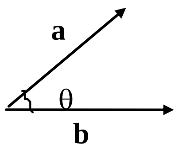
$R^2 = 100 + 25$

$R^2 = 125$

$R = 5\sqrt{5}$ uv



EXEMPLO 2: Dado o diagrama vetorial , trace o vetor resultante e dê o seu valor:

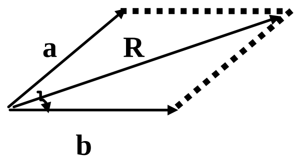


$\theta = 60^\circ$

a = 4uv

b = 3 uv

Solução:



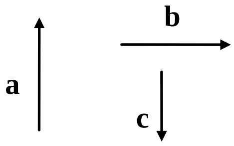
$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\theta}$

$R = \sqrt{16 + 9 + 2.4.3.\cos 60^\circ}$

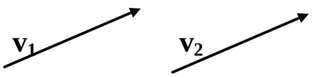
$R = \sqrt{25 + 24 \,.\, 1/2}$

$R = \sqrt{37}$ u v

EXEMPLO 3: Trace a resultante **R** do sistema de vetores abaixo:



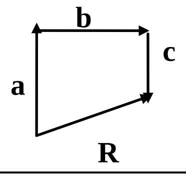
Solução: Um vetor equipolente é um outro vetor de mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.



Os vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são equipolentes ($v_1 = v_2$)

De um ponto qualquer, traçam-se vetores equipolentes aos vetores **a , b** e **c** *, construindo-se um polígono. A resultante* **R** *é um vetor que liga a origem do primeiro vetor traçado ao final do último vetor:*

R = a + b + c



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:

1) Mariana anda 40 metros para o leste e certa distância para o norte, de tal forma que fica afastada 50 metros do ponto de partida. Determine a distância percorrida para o norte.

2) Os deslocamentos sucessivos efetuados por um veículo, quando se movimenta de um Ponto A para outro B, foram: 40 Km para o norte, 40 Km para o leste e 10 Km para o sul. Para retornar de B para A, qual a menor distância a ser percorrida?

3) Considere dois vetores : um cujo módulo seja 30 e outro cujo módulo seja 40. Determine como os vetores podem ser combinados para que a soma tenha módulo:

a) 70 b) 10 c) 50

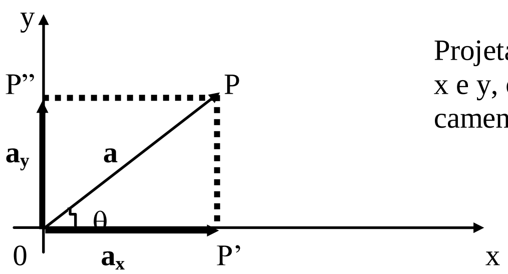
4) Um barco desenvolve, em relação à água de um rio, velocidade de 6 m/s. A velocidade da correnteza é de 3 m/s, em relação às margens. Determine a velocidade resultante do barco em relação às margens quando:

a) ele desce o rio;

b) ele sobe o rio.

- Decomposição de um vetor sobre dois eixos ortogonais:

Dado um vetor **a** e um sistema de dois eixos ortogonais x e y :

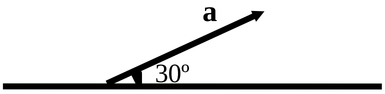


Projetando ortogonalmente as extremidades do vetor **a** nos eixos x e y, obtemos suas componentes retangulares $\mathbf{a_x}$ e $\mathbf{a_y}$. Analiticamente temos: o triângulo OP'P é retângulo, portanto:

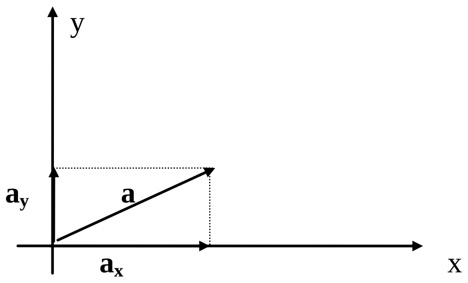
$$\cos\theta = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{a_x}{a} \Rightarrow \boxed{a_x = a \cdot \cos\theta}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{a_y}{a} \Rightarrow \boxed{a_y = a \cdot \text{sen}\,\theta}$$

EXEMPLO 4: Determine o módulo das componentes retangulares do vetor **a** de módulo 10 metros, conforme a figura:



Solução: Pelo ponto de origem do vetor **a** *, consideremos um sistema de eixos coordenados x e y, como mostra a figura:*



Projetando o vetor **a ,** *nos eixos x e y , temos:*

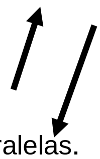
Componente segundo x	***Componente segundo y***
$a_x = a \cdot \cos 30º$	$a_y = a \cdot \text{sen } 30º$
$a_x = 10 \cdot \sqrt{3} / 2$	$a_y = 10 \cdot 1/2$
$\boxed{a_x = 5 \cdot \sqrt{3} \text{ m}}$	$\boxed{a_y = 5 \text{ m}}$

EXERCÍCIO DE APRENDIZAGEM:

6) Um corpo é lançado com velocidade de 500 m/s, fazendo um ângulo de 60º com a horizontal. Determine as componentes vertical e horizontal da velocidade do corpo.

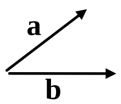
Exercícios de Fixação:

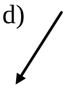
7) Os vetores ao lado têm:



a) mesmo módulo.
b) mesmo sentido
c) mesma direção.
d) direções diferentes e paralelas.
e) simetria.

8) São dados os vetores **a e b** . Assinale o vetor que melhor representa a diferença (**b - a**)



a)  b)  c)  d) 

9) Dois vetores têm módulos 4 m/s e 5 m/s e formam entre si um ângulo de 60º. A razão entre o módulo do vetor soma e o módulo do vetor diferença é aproximadamente:

a) 2,3 b) 1,7 c) 3 d) 4,2

10) Dois vetores têm módulos iguais a v e formam entre si um ângulo de 120º. A resultante entre eles tem módulo:

a) v b) 2v c) 3v d) d/2

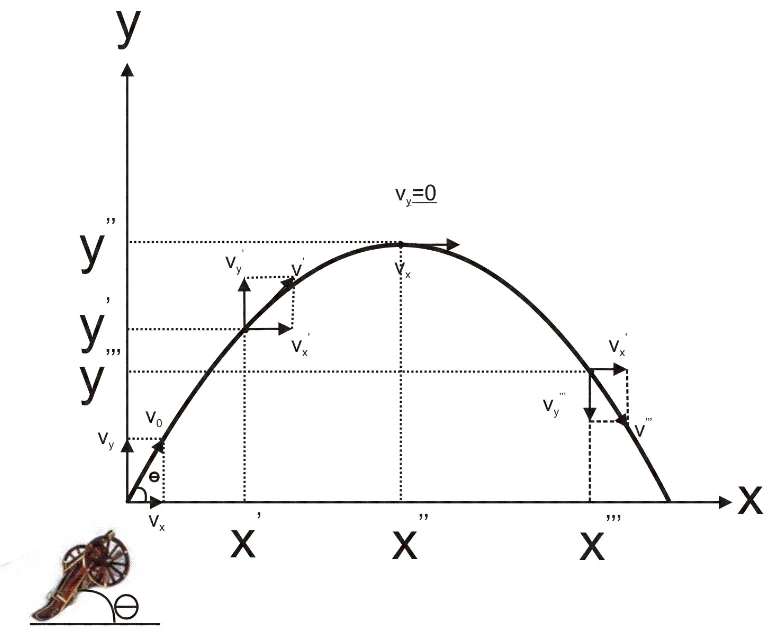
11) Um barco alcança a velocidade de 18 Km/h, em relação às margens de um rio, quando se desloca no sentido da correnteza e de 12 Km/h quando se desloca em sentido contrário ao da correnteza. Determine o módulo da velocidade do barco em relação às margens e o módulo da velocidade das águas em relação às margens.

12) Um homem nadando em um rio paralelamente às suas margens, vai de um marco P a outro Q em 30 minutos e volta para P em 15 minutos. Se a velocidade da correnteza é de 1Km/h, qual a distância entre P e Q?

13) Um pescador rema perpendicularmente às margens de um rio, com uma velocidade de 3 m/s em relação às águas. As águas possuem velocidade de 4 m/s em relação às margens. Determine a velocidade do pescador em relação às margens.

4.2 - Movimento de um projétil:

Na figura ao lado, vemos um canhão lançando uma bala obliquamente, próximo à superfície da Terra, com uma velocidade inicial v_0 e um ângulo de lançamento com a horizontal igual a θ . Para facilitar o nosso estudo, desprezaremos a resistência do ar, pois este iria frear o projétil prejudicando seu movimento. Supondo então desprezível a resistência do ar, após o lançamento o projétil sofrerá apenas com a ação da gravidade, que o trará de volta ao solo. O projétil descreverá uma trajetória curva, semelhante a essa mostrada na figura. Mostraremos no Ex. 5 que essa curva é uma parábola.



Como a única força que atua no projétil é o seu peso, concluímos que o movimento é acelerado e a sua aceleração será a aceleração da gravidade g.

Se fossemos estudar a trajetória do projétil sobre a parábola, tendo como dados iniciais apenas a velocidade inicial do projétil e o ângulo que este faz com a horizontal, nosso estudo ficaria muito complicado. Se você observar bem um movimento deste tipo, você notará que este movimento poderá ser decomposto em dois movimentos que nós já estudamos e que já estamos habituados com suas equações:

1º) Na vertical, teremos um lançamento vertical para cima, onde a velocidade inicial será v_{0y} , que é a velocidade de lançamento projetada no eixo-y, como foi feito no exercício de aprendizagem número 6 e no exemplo 4 do tópico 4.1. Sendo assim, teremos no eixo-y um lançamento vertical para cima, com uma velocidade inicial $v_{0y} = v_0 \,.\, \text{sen}\, \theta$ e cuja equação horária das alturas ficará:

$$\boxed{y = y_0 + v_{0y} \,.\, t + (g/2) \,.\, t^2} \quad \text{onde } y_0 = \text{altura de lançamento}$$

Já a velocidade de subida do projétil segundo o eixo-y poderá ser dada por: $\boxed{v_y = v_{0y} + g \,.\, t}$

Podemos lançar mão também da eq. de Torricelli: $\boxed{v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\, g\, \Delta y}$

2º) Na horizontal, teremos um movimento retilíneo e uniforme, pois a única força que atua no projétil é a gravitacional e esta força é vertical, não atrapalhando o movimento na horizontal. Sendo assim teremos no eixo-x um M.U. cuja velocidade será dada pela projeção da velocidade de lançamento sobre o eixo-x:

$$v_x = v_0 \,.\, \cos \theta$$

A eq. horária da posição x será dada por:

$$\boxed{x = x_0 + v_x \,.\, t} \quad \text{Normalmente usa-se } x_0 = 0$$

Vamos fazer agora uma análise do movimento do projétil lançado pelo canhão da figura. O projétil é lançado com uma velocidade inicial v_0 que pode ser decomposta em duas velocidades v_{0y} e v_x . Quando ele estiver a uma altura y' , ele já terá deslocado na horizontal até x' e terá uma velocidade v' que poderá ser decomposta na vertical como v_y' e na horizontal como v_x . Só que normalmente no problema você não conhecerá v' que poderá ser calculada através da soma vetorial de v_x e v_y' , pois v_x e v_y' é fácil de achar através das equações já estudadas.

Logo $\vec{v}^{'} = \vec{v}_x + \vec{v}_y^{'}$ ou seja $v^{'} = \sqrt{v_x^2 + v_y^{'2}}$

Quando o projétil alcançar a altura y'' , ele está alcançando a altura máxima, o que tornará $v_y = 0$ e neste ponto o projétil terá apenas uma velocidade horizontal igual a v_x .

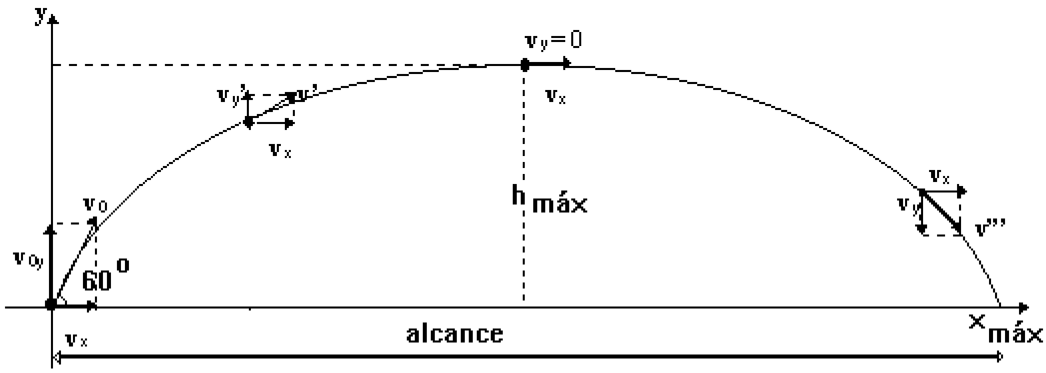
Note agora que quando o projétil estiver na posição x''' , ele já estará descendo com uma velocidade na vertical v_y''' < 0 . Você poderá calcular a velocidade v''' da mesma forma que foi calculada na subida.

Vamos ver agora como funciona isso tudo!

EXEMPLO 5: Um corpo é lançado do solo verticalmente para cima, segundo um ângulo de 60º com a horizontal com velocidade de 400 m/s. Admitindo g = 10 m/s² e $\sqrt{3}$ = 1,7 ; pede-se:

a) o tempo que o corpo leva para atingir a altura máxima em relação ao solo;
b) a altura máxima atingida;
c) o tempo gasto para atingir o solo;
d) o alcance máximo do corpo;
e) a velocidade do corpo no instante 8 segundos;
f) a equação da trajetória do corpo.

Solução: O movimento do corpo pode ser decomposto em dois eixos, x e y , perpendiculares entre si. Segundo x, o movimento é uniforme e segundo y o movimento é uniformemente variado.



Inicialmente vamos determinar as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial.

Componente segundo x :

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 60^o$

$v_{0x} = 400 \cdot ½ = 200$ m/s (constante)

Componente segundo y:

$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } 60^o$

$v_{0y} = 400 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 200 \cdot 1{,}7 = 340$ m/s

As funções que regem os movimentos são:

segundo x

$x = x_0 + v_{0x}\, t$

$x = 200\, t$

segundo y

$y = y_0 + v_{0y}\, t + ½\, gt^2$

$y = 0 + 340\, t + ½\, (-10)\, t^2$

$y = 340\, t - 5t^2$

$v_y = v_{0y} + gt$

$v_y = 340 - 10.t$

a) Na altura máxima $v_y = 0$

$v_y = 340 - 10.t$

$0 = 340 - 10.t \Rightarrow \underline{t = 34 \text{ s}}$

b) Substituindo t = 34 s em: $y = 340\, t - 5t^2$

$y = 340 \cdot 34 - 5 \cdot 34^2$

$y = 11\,560 - 5\,780$

$\underline{y = 5780 \text{ m}}$

c) Quando o corpo toca o solo $y = 0$

$y = 340\, t - 5t^2$

$0 = 340\, t - 5t^2$

$0 = 5t\,(68 - t) \Rightarrow \cancel{t = 0}$ *instante de lançamento*

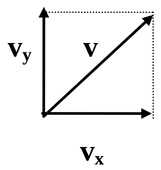
$\underline{t = 68 \text{ s}}$

d) Substituindo t = 68 s em:

$x = 200\, t$

$x = 200 \cdot 68 \Rightarrow \underline{x = 13\,600 \text{ m}}$

e) A velocidade **v** *é a resultante de duas velocidades* $\mathbf{v_{0x}}$ *e* $\mathbf{v_{0y}}$ *. No instante 8s o corpo está subindo, vide figura:*



Cálculo de v_y *no instante 8s.*

$v_y = 340 - 10\,t$

$v_y = 340 - 10 \cdot 8$

$v_y = 260$ m/s

Portanto: $v^2 = v_y^2 + v_x^2$

$v = \sqrt{260^2 + 200^2}$ assim $v \cong 328$ m/s

f) A equação da trajetória é a que relaciona x com y :

Temos $x = 200\,t$ (1)

$y = 340\,t - 5t^2$ (2) *De* (1) *teremos que* $t = x / 200$

Substituindo em (2)*, vem:*

$y = 340 \cdot (x / 200) - 5 \cdot (x / 200)^2 \Rightarrow y = (17/10)\,x - (5x^2 / 40\,000)$

$y = \dfrac{17}{10}x - \dfrac{1}{8\,000}x^2$ *o que mostra que a trajetória é uma parábola.*

Observações:

a) O módulo da velocidade vertical v_y diminui durante a subida e aumenta na descida.

b) No ponto de altura máxima ($h_{máx}$) o módulo da velocidade no movimento vertical é zero ($v_y = 0$) .

c) A distância horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto de queda do corpo é denominada alcance ($x_{máx}$). Neste ponto $y = 0$.

d) A posição do corpo em um dado instante é determinada pelas coordenadas x e y . Por exemplo, P_1 (x_1 , y_1)

e) A velocidade num dado instante é obtida através da soma vetorial das velocidades vertical e horizontal, isto é, $\mathbf{v = v_x + v_y}$ **.** O vetor **v** é tangente à trajetória em cada instante.

f) Para um lançamento horizontal, teremos as mesmas equações porém com $\theta = 0º$ e $v_{0y} = 0$ e a velocidade do projétil segundo o eixo-x será igual a velocidade de lançamento. Veja o exemplo 6 .

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:

14) Um canhão dispara um projétil que parte com velocidade de 50 m/s. Nesse local g = 10 m/s^2 e o canhão forma 45º com a horizontal. Pergunta-se:

a) qual o módulo da componente horizontal da velocidade;

b) qual o módulo da componente vertical da velocidade parta t = 0 ;

c) em que instante $v_y = 0$;

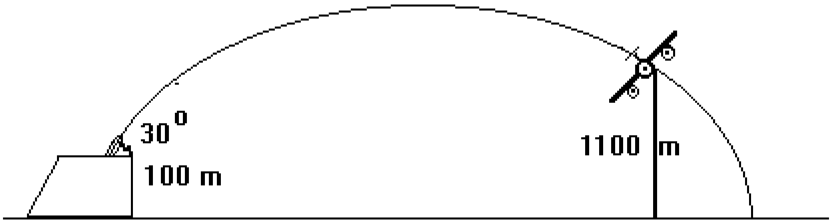
d) qual o tempo que o projétil leva para retornar ao chão;

e) qual o módulo de sua velocidade nesse instante;

f) qual a altura máxima atingida pelo projétil;

g) a que distância o projétil cai do canhão?

15) Um canhão dispara um projétil do alto de uma elevação de 100 metros de altura, segundo um ângulo de 30º com a horizontal, com velocidade de 300 m/s , conforme a figura.
Admitindo g = 10 m/s^2 determine o tempo que o projétil leva para atingir um alvo localizado a 1 100 metros de altura, conforme indica a figura. Faça $\sqrt{3} = 1,7$



- Alcance máximo de um projétil :

Sabemos que $y = v_0 \text{ sen } \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$ e que $v_y = v_0 \text{ sen } \theta - g.t$ e que para o eixo- x temos :

$$\mathbf{x = v_0 \cos \theta \cdot t}$$

Quando o projétil atinge a altura máxima, $v_y = 0$ logo $0 = v_0 \text{ sen } \theta - g \cdot t$ $\Rightarrow$ $t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$ Tempo de subida

logo o tempo total de percurso será: $t = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$

Substituindo o tempo total de percurso na eq. para o alcance teremos:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}{g}$$

mas em trigonometria sabemos que 2 sen θ cos θ = sen 2 θ

então : $\boxed{x_{máx} = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}}$ (alcance)

Repare que para termos alcance máximo é preciso que sen 2 θ = 1 e para que isto ocorra 2θ = 90º .

Conclusão $\boxed{\theta = 45º}$

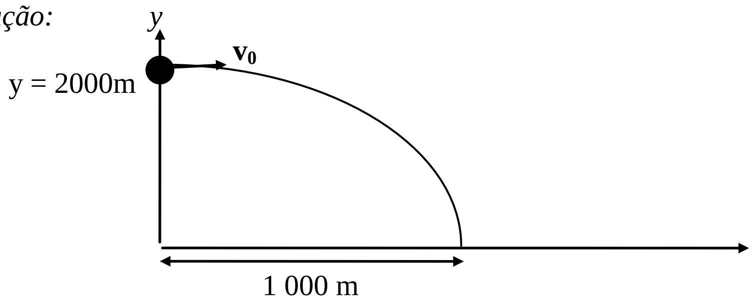
Portanto, se quisermos lançar um projétil o mais longe possível, devemos lançá-lo com velocidade formando 45º com a horizontal.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:

16) Usando a fórmula para o alcance máximo, determine a letra g no problema 15.

EXEMPLO 6: Um avião bombardeiro está voando a 2 000 m de altura quando solta uma bomba. Se a bomba cai a 1 000 m da vertical em que foi lançada, qual o módulo da velocidade do avião? Adote g = 10 m/s^2 .

Solução:



Como o avião está voando horizontalmente a velocidade da bomba é igual à do próprio avião. Chegaremos a esta velocidade pela eq: $x_{máx.} = v_0 \,.\, t$ *, onde t será o tempo de queda da bomba que deveremos calcular agora.*

$y = y_0 + v_{0y} \,.\, t - gt^2/2$ *onde* $y = 0$ *(solo)* $y_0 = 2000$ m *(altura inicial) e* $v_{0y} = 0$ *, pois o avião voa horizontalmente.*

sendo assim - $0 = 2000 - 5t^2$

$5t^2 = 2000$ $\underline{t = 20 \text{ s}}$ *(tempo de queda)*

Substituindo o tempo de queda na eq. do alcance máximo teremos:

$x_{máx} = v_0 \,.\, 20$ *como* $x_{máx} = 1000$ m $1000 = v_0 \,.\, 20$ $\Rightarrow$ $v_0 = 1000 / 20$ $\Rightarrow$ $\underline{v_0 = 50 \text{ m/s}}$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:

O enunciado abaixo refere-se às questões 17, 18 e 19 :

Um projétil é lançado horizontalmente com velocidade inicial de 5 m/s de uma altura h = 180 m. Considere a resistência do ar desprezível e adote g = 10 m/s^2 .

17) No instante t = 5s as coordenadas X e Y, que determinam as posições do projétil, valem, em unidades do S.I. respectivamente:

a) 10 e 45 b) 25 e 55 c) 10 e 125 d) 25 e 80 e) 50 e 180

18) No instante 5s, o projétil da questão anterior se encontra a uma distância do solo igual a:
a) 25 m b) 50 m c) 55 m d) 70 m e) 125 m

19) A velocidade do projétil, no instante 0,5 s , tem módulo e direção, respectivamente iguais a:
a) 7 m/s e 45º b) 7 m/s e 30º c) 7 m/s e 60º d) 5 m/s e 30º e) 5 m/s e 60º

<u>Exercícios de Fixação</u>:

20) Assinale com V de verdadeiro ou F de falso:

( ) 1. A trajetória descrita por um móvel lançado horizontalmente no vácuo é sempre parabólica, se considerarmos g constante.

( ) 2. O movimento realizado pelo projétil lançado horizontalmente no vácuo é uniformemente variado, se considerarmos g constante.

( ) 3. No lançamento horizontal realizado no vácuo, a velocidade do projétil é constante em módulo e direção.

( ) 4. Um avião que voa horizontalmente lança uma bomba contra um alvo. Despreze a resistência do ar. No instante em que a bomba explode no alvo, o avião estará exatamente sobre a vertical que passa pelo alvo.

( ) 5. No lançamento horizontal, o alcance jamais poderá ser igual a altura de lançamento.

( ) 6. A velocidade com que o projétil obliquamente chega ao plano de referência é igual à velocidade de lançamento.

( ) 7. O lançamento de um projétil lançado oblíqua ou horizontalmente é resultante de um movimento horizontal uniforme e outro vertical uniformemente variado.

( ) 8. O tempo que um corpo lançado horizontalmente leva para atingir o plano de referência é igual ao tempo que levaria para chegar a esse plano se caísse em queda livre do ponto de lançamento.

( ) 9. Um projétil lançado obliquamente tem seu alcance horizontal máximo quando o ângulo de lançamento acima da horizontal for igual a 45º .

Uma bola é lançada para cima, em direção que faz um ângulo de 45º com a horizontal, com velocidade v . Despreze a resistência do ar. Este enunciado refere-se aos exercícios 21, 22 e 23 :

21) A componente horizontal $\mathbf{v_x}$ da velocidade **v** da bola é:
a) v / cos 45º b) v tg 45º c) v cos 45º d) v sen 45º e) v / sen 45º

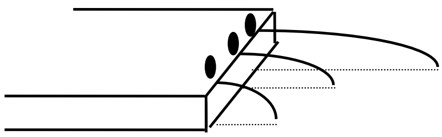
22) A componente $\mathbf{v_y}$ da velocidade **v** da bola:
a) é constante.
b) é função do 1º grau do tempo.
c) é função do 2º grau do tempo.
d) tem o mesmo sentido em qualquer instante.
e) é sempre diferente de zero.

23) A aceleração da bola é:
a) horizontal e variável;
b) inclinada e constante;
c) vertical e constante;
d) inclinada e variável;
e) nula no ponto mais alto atingido pela bola.

24) Durante um exercício de segurança contra incêndio um bombeiro segurou a mangueira d'água formando um ângulo de 45º com a horizontal. Sabendo-se que a aceleração local da gravidade é g = 10 m/s^2 e que a velocidade de saída do jato d'água é de 20 m/s, pode-se afirmar que serão atingidos objetos situados a uma distância horizontal do bico da mangueira de:
a) 50 m b) 75 m c) 60 m d) 40 m e) $80\sqrt{2}$ m

25) Um projétil é lançado obliquamente com velocidade inicial de 100 m/s, inclinado com um ângulo θ com a horizontal. Despreza-se a resistência do ar e dados g = 10 m/s^2 e sen θ = 0,6 cos θ = 0,8 , calcule a velocidade do projétil no instante 5s e o tempo para que ele atinja a altura máxima ? (Dar as velocidades nas direções x e y)

26) A figura abaixo mostra três corpos de massas diferentes no instante em que são lançados simultaneamente de uma plataforma com velocidade horizontais v_1 = 0 , v_2 = 10 m/s e v_3 = 50 m/s. A altura da plataforma é 1,25 m . Despreze o atrito com o ar e considere g = 10 m/s^2 . Quais os tempos de permanência no ar dos três corpos?



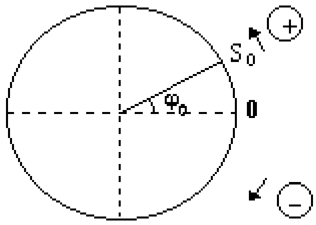
27) Um avião deixa cair uma bomba sobre um alvo. Desprezando a resistência do ar, o movimento da projeção da bomba sobre um plano horizontal é , para um observador na Terra:
a) circular uniforme ;
b) retilíneo uniforme ;
c) retilíneo uniformemente variado;
d) retilíneo qualquer ;
e) curvilíneo variado.

28) Uma pequena bola foi rolada numa marquise de 5 m de altura, indo chocar-se com o solo a 4 m da marquise. Despreze a resistência do ar e adote g = 10 m/s^2 . Determine:
a) o tempo de queda da bola ;
b) a velocidade v_0 que a bola possuía ao deixar a marquise.

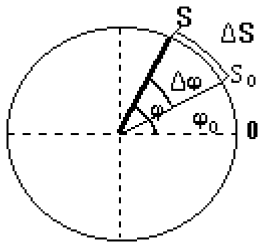
4.3 - Movimento Circular : Descrição do Movimento Circular (M.C.)

Um importante exemplo de movimento é o movimento circular. Como exemplo deste movimento temos um corpo na superfície da Terra, que graças ao movimento de rotação da mesma, faz com que tal corpo descreva MC ao redor do centro da Terra.

Considere uma partícula em MC e tomemos como origem da trajetória a indicada na figura. Seja S_0 a posição inicial da partícula e o ângulo φ_0 (em radianos) será chamado ângulo horário inicial ou fase inicial da partícula.



Em um certo instante t a partícula estará ocupando a posição S e o ângulo φ da figura será chamado ângulo horário ou fase da partícula no instante t.



Nesse intervalo de tempo ($\Delta t = t - t_0$) a partícula "varreu" um ângulo $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ que chamaremos de deslocamento angular da partícula no intervalo de tempo Δt.

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0} \quad \text{(deslocamento angular)}$$

Define-se então **velocidade angular média** (ω_m) da partícula como:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{(velocidade angular média)}$$

obs. Deve-se trabalhar sempre com radiano. As equações são mostradas a partir da definição de radiano.

<u>EXEMPLO 7</u>: Um móvel descreve M.C. Sabe-se que ele partiu com fase de $\pi / 2$ rad e em 10 s sua fase era $5\pi / 2$ rad. Qual foi sua velocidade angular média?

Solução: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad $\varphi = \frac{5\pi}{2}$ rad $\Delta t = 10$ s	$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$ rad $\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ $\boxed{\omega_m = \frac{\pi}{5} \text{rad/s}}$

<u>EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM</u>:

29) Um ciclista está girando numa pista circular, dando uma volta em cada 12 s . Calcule sua velocidade angular em rad/s .

4.3.1 - Movimento Circular Uniforme (MCU) : De modo análogo que fazemos para a velocidade escalar instantânea , definimos também velocidade angular instantânea (ω) :

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$ (velocidade angular instantânea)

Em um MCU dá-se o nome de período (T) ao tempo gasto pela partícula para realizar uma volta completa.

Imagine uma partícula em M.C. Digamos que ela tenha dado 10 voltas em 5 segundos. Quantas voltas ela terá dado em 1s ? A resposta é 2 voltas. Dizemos então que a freqüência do movimento da partícula é 2 voltas/s . Logo:

Freqüência é o número de voltas que a partícula realiza por unidade de tempo.

A unidade mais comum de freqüência é voltas / s que também é conhecida como rps (rotações por segundo) ou também **Hertz (Hz)**

voltas/s = rps = Hz

Obs.: Existe uma relação muito simples entre f e T :

número de voltas	Tempo
1	T
f	1

$$f = \frac{1}{T}$$

Sabemos que $w = \dfrac{2\pi}{T}$ mas 1/T = f $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega = 2\,\pi\, f}$

E lembrando que S = φ R (definição de radiano) temos que:

$S = \varphi R$

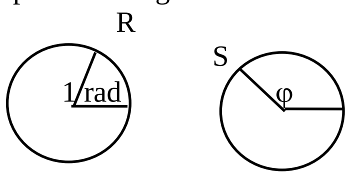
$S_0 = \varphi_0 R$

$S - S_0 = (\varphi - \varphi_0) R \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \Delta\varphi \;.\; R$

mas $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\varphi_0 . R}{\Delta t} = \omega . R$ ou seja $\mathbf{v = \omega \;.\; R}$

Definição de 1 rad

Dá-se o nome de 1rad ao arco cujo comprimento é igual ao raio.



1 rad = R

S rad = S $\Rightarrow$ $\boxed{S = \varphi \;.\; R}$

A relação acima é válida não só para MCU mas para qualquer movimento circular.

Se resumirmos todas as nossas relações teremos:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \,.\, t$$
$$f = 1/T$$
$$w = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$
$$\Delta s = \Delta\varphi \,.\, R$$
$$v = \omega \,.\, R$$

4.3.2 - Aceleração no M.C.U.: O movimento circular uniforme é um movimento caracterizado pela variação da direção da velocidade. O módulo da velocidade não varia e a aceleração tangencial é nula. No M.C.U. só existe a aceleração centrípeta (ou normal), que é responsável pela mudança da direção da velocidade e seu valor é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad \text{sendo } v = \omega R \qquad a_c = \frac{\omega^2 R^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_c = \omega^2 . R}$$

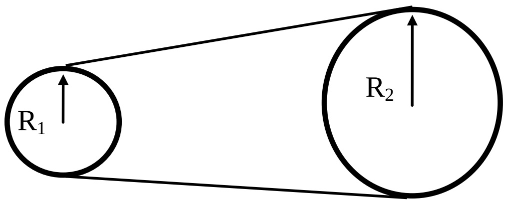
EXEMPLO 8: Um LP gira a 33 rps e tem raio de 15 cm. Um pequeno pedaço de papel é colocado na sua beira e portanto descreve M.C. Pede-se:
a) a frequência de rotação do papel;
b) o período de rotação do papel;
c) sua velocidade angular;
d) sua velocidade linear;
e) o espaço que ele percorre em 10 s.

Solução: a) $f = 33$ rps $= 33$ Hz $\quad f = 33$ Hz
b) $T = 1/f = 1/33 = 0{,}03$ s $\quad T = 0{,}03$ s
c) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 33 = 66\pi \quad \omega = 66\pi$ rad/s
d) $V = \omega \cdot R = 66\pi \cdot 15 = 990\pi$ cm/s $\quad V = 990\pi$ cm/s
e) $$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta S = V \cdot \Delta t = 990\pi \cdot 10 = 9\,900\pi \Rightarrow \Delta S = 9\,900\pi \text{ cm} \cong 311 \text{ m}$$

EXEMPLO 9: Uma outra unidade de frequência muito usada é rpm (rotação por minuto). Se um motor a gasolina gira a 3000 rpm, qual a sua velocidade angular?

Solução: $f = 3\,000$ rpm
$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3\,000 = 6\,000\pi \Rightarrow \omega = 6\,000\pi$ rad/min

EXEMPLO 10: Duas polias são ligadas por uma correia como mostra a figura abaixo. As polias têm raios $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm. Se a polia número 1 efetua 40 rpm, qual será a frequência da segunda?



Solução: Sejam V_1 e V_2 as velocidades dos pontos das extremidades das polias 1 e 2.
Como as polias estão ligadas por uma correia, temos:

$V_1 = V_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow 2\pi f_1 R_1 = 2\pi f_2 R_2 \Rightarrow \boxed{f_1 R_1 = f_2 R_2}$

$40 \cdot 10 = f_2 \cdot 20 \Rightarrow \underline{f_2 = 20 \text{ rpm}}$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:

30) Qual a velocidade escalar periférica de uma polia de 30 cm de raio e que está girando a 100 rpm?

31) O tronco vertical de um eucalipto é cortado rente ao solo e cai, em 5 segundos, num terreno plano e horizontal, sem se desligar por completo de sua base.
a) Qual a velocidade angular média do tronco durante a queda?
b) Qual a velocidade escalar média de um ponto a 10 m da base?

32) Dois corredores competem numa pista perfeitamente circular. O corredor A foi sorteado para a raia interna e o B, para a externa. Se ambos conseguem fazer o percurso no mesmo tempo, pode-se afirmar que as velocidades lineares médias V_A e V_B e as velocidades angulares médias ω_A e ω_B dos corredores guardam, respectivamente, as seguintes relações:

a) $V_A > V_B$ e $\omega_A > \omega_B$
b) $V_A < V_B$ e $\omega_A = \omega_B$
c) $V_A = V_B$ e $\omega_A < \omega_B$
d) $V_A = V_B$ e $\omega_A > \omega_B$
e) $V_A = V_B$ e $\omega_A = \omega_B$

33) Uma partícula incide horizontalmente, com velocidade v = 200 m/s , sobre um cilindro colocado na vertical e cujo raio é π / 10 m . O cilindro possui um orifício por onde a partícula penetra. Determine o menor valor da velocidade angular do cilindro para que a partícula saia do cilindro pelo mesmo orifício pelo qual penetrou. A ação da gravidade sobre a partícula pode ser desconsiderada no caso.

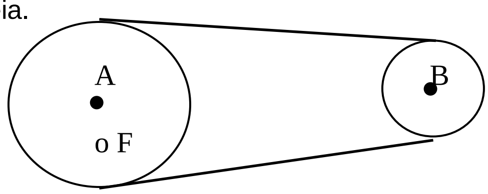
34) Uma partícula executa um MCU de 1 m de raio com aceleração de 0,25 m/s^2 . Determine para esse movimento:

a) A velocidade escalar;
b) A velocidade angular;
c) O período.

35) Duas polias de centros A e B e raios R_A e R_B estão ligadas por uma correia. Na polia A existe um furo F e observa-se que durante o movimento do sistema o furo executa movimento periódico de período T . Pede-se:

a) As velocidades angulares das duas polias;
b) a velocidade escalar da correia.

Dados: T = 0,02 s
R_A = 20 cm
R_B = 5 cm



4.3.3 - Movimento Circular Uniformemente Variado (MCUV) :

Dá-se o nome de movimento circular uniformemente variado (MCUV) àquele que apresenta aceleração angular constante e diferente de zero.

$$\boxed{\text{MCUV} \Leftrightarrow \alpha = \text{cte} \neq 0}$$

Seja $V = \omega . R$

$V_0 = \omega_0 . R$

$V - V_0 = (\omega - \omega_0). R \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \Delta\omega . R$

e então $a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\omega . R}{\Delta t} = \alpha . R$ $\quad \boxed{a = \alpha . R}$

No próximo exemplo você irá perceber como surge a equação horária de um MCUV.

<u>EXEMPLO 11</u>: Um ponto realiza MCUV e tem sua velocidade angular variada de 20 rad/s para 40 rad/s em 10 s. Qual o número de revoluções que ele realizou?

Resolução: Para o MUV temos: $S = S_0 + v_0 t + ½ \gamma t^2$

Dividindo toda a expressão por R, temos:

$$\frac{S}{R} = \frac{S_0}{R} + \frac{v_0 t}{R} + \frac{1}{2}\frac{a t^2}{R}$$

mas: $S/R = \varphi \quad S_0 / R = \varphi_0$

$V_0 / R = \omega_0 \quad a / R = \alpha$

logo : $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + ½ \alpha t^2}$ *(1)*

Que é a função horária para o MCUV. De modo equivalente podemos mostrar que:

$\omega = \omega_0 + \alpha . t$ *(equação da velocidade angular)*

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \Delta t$ *(equação de Torricelli para MCUV)*

De (1) tiramos que: $\Delta\varphi = \omega_0 t + ½ \alpha t^2$ *onde* $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{40 - 20}{10} = \dfrac{20}{10} = 2$ $\quad \alpha = 2 \text{ rad/s}^2$

logo: $\Delta\varphi = 20 \times 10 + ½ . 2 . 10^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta\varphi = 300 \text{ rad}}$

1 volta —— 2π *rad*

n voltas —— *300 rad*

$2 \pi n = 300 \quad \Rightarrow \quad n = 300 / 2\pi \quad \underline{n = 47,7 \text{ voltas}}$

36) Um motociclista está correndo numa pista circular de $2,5 . 10^2$ m de raio. Em determinado instante, a velocidade do motociclista é 35 m/s , e esta velocidade está crescendo de 2 m/s a cada segundo. Qual é o módulo da aceleração do motociclista, no instante considerado?

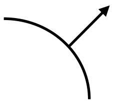
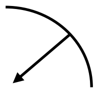
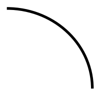
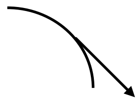
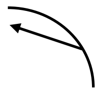
a) 2 m/s^2 b) 17,5 m/s^2 c) 5,3 m/s^2 d) 6,9 m/s^2 e) n.r.a.

37) Um disco de 20 cm de raio gira com velocidade angular de 1,0 rad/s , em torno de um eixo vertical que passa por seu centro. Em determinado instante, começa a ser acelerado com uma aceleração angular constante de 10 rad/s^2. Meio segundo após o início da aceleração, qual será o módulo do vetor aceleração de um ponto da periferia do disco?

Exercícios de Fixação:

38) Assinale com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas:
( ) 1. O vetor posição caracteriza perfeitamente a posição de um ponto em relação a um referencial.
( ) 2. O vetor deslocamento tem módulo sempre menor que o deslocamento escalar.
( ) 3. A velocidade vetorial média tem direção tangente à trajetória.
( ) 4. O módulo da velocidade vetorial instantânea é igual ao módulo da velocidade escalar para o mesmo ponto material.
( ) 5. A componente tangencial do vetor aceleração mede a variação do módulo do vetor velocidade.
( ) 6. O movimento circular e uniforme é desprovido de aceleração.
( ) 7. No movimento circular e uniforme a frequência é constante.
( ) 8. A frequência é inversamente proporcional ao quadrado do período.
( ) 9. Todo móvel que realiza um movimento circular está sujeito a uma aceleração.
( ) 10. No MCU a velocidade é variável.
( ) 11. No MCUV existem três acelerações.
( ) 12. O módulo da aceleração normal varia com o tempo no MCUV.

39) Na pergunta a seguir escolha uma entre as 5 opções apresentadas, nas quais a linha curva representa um trecho da estrada, vista de cima, e as setas indicam o módulo, a direção e o sentido de vetores. O automóvel se desloca da esquerda para a direita da figura. Se o velocímetro indica nesta curva um valor constante (60 Km/h) , qual das figuras melhor representa a velocidade do automóvel?

a)  b)  c)  d)  e) 

40) Considere as afirmativas:
I - O módulo do vetor velocidade é igual ao módulo da velocidade escalar.
II - O módulo do vetor aceleração é igual ao módulo da aceleração escalar.
III - O módulo da aceleração tangencial é igual ao módulo da aceleração escalar.
IV - A direção do vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.
V - A direção do vetor aceleração é sempre perpendicular à trajetória.

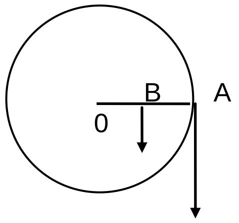
São erradas: a) I e IV b) III e V c) II e IV d) I e III e) II e V

41) Num movimento circular e uniforme podemos dizer que a aceleração centrípeta é dada pela:
a) variação da velocidade escalar no tempo.
b) aceleração vetorial média em uma volta.
c) variação da velocidade vetorial no tempo.
d) n.r.a.

42) Para um corpo de massa m que descreve um movimento circular de raio R:
a) a aceleração centrípeta é maior que a aceleração tangencial.
b) a velocidade vetorial varia com o tempo, do mesmo modo que a velocidade escalar.
c) a velocidade vetorial está sempre na direção da aceleração centrípeta.
d) n.r.a.

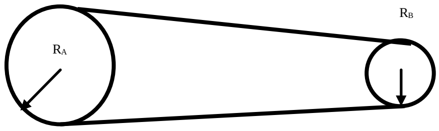
43) Duas bolas A e B giram em movimento circular uniforme presas nos extremos de duas cordas de comprimentos respectivamente iguais a 2 m e 4 m . Sabendo que elas giram com a mesma velocidade tangencial, podemos dizer que num mesmo intervalo de tempo:
a) a bola A dá mais voltas que a bola B.
b) a bola B dá mais voltas que a bola A.
c) ambas as bolas darão o mesmo número de voltas.
d) não há dados para julgar.

O esquema representa uma polia que gira em torno de um eixo. A velocidade do ponto A é 50 cm/s e a do ponto B é 10 cm/s. A distância AB vale 20 cm. Este enunciado refere-se aos exercícios 44 e 45 :



44) A velocidade angular da polia vale:
a) 2 rad/s b) 5 rad/s c) 10 rad/s d) 20 rad/s e) 50 rad/s

45) O diâmetro da polia vale:
a) 20 cm b) 50 cm c) 75 cm d) 100 cm e) 150 cm



46) A figura seguinte representa uma correia passando pelas roldanas A e B. Sabendo que $R_A = 2\ R_B$, a velocidade angular da roldana A em relação à da roldana B é:
a) $\omega_A = 4\ \omega_B$ b) $\omega_A = 2\ \omega_B$ c) $\omega_A = \omega_B$
d) $\omega_A = \omega_B / 2$ e) $\omega_A = \omega_B / 4$

47) Um corpo realiza um MCU com velocidade angular de 50 rad / s e raio de trajetória igual a 2 metros. Determine o módulo da aceleração centrípeta desse corpo.

48) Duas polias estão ligadas entre si por uma correia. O raio de uma delas é 20 cm e o da outra é 10 cm. Se a polia de raio maior efetua 25 rpm, determine a frequência de rotação da outra polia e a velocidade linear de um ponto da sua periferia.

Gabarito:

UNIDADE IV: Cinemática Vetorial

1) 30m
2) 50 Km
3) a) $\theta = 0^o$ b) $\theta = 180^o$ c) $\theta = 90^o$
4) a) 9 m/s b) 3 m/s
5) 4 Km/h e 5 Km/h
6) 433 m/s e 250 m/s
7) c
8) c
9) b
10) a
11) $v_b = 15$ Km/h $v_c = 3$ Km/h
12) 1 Km
13) 5 m/s

Lançamentos

14) a) $25\sqrt{2}$ m/s b) $25\sqrt{2}$ m/s
c) $5\sqrt{2}\ /\ 2$ s
d) $5\sqrt{2}$ s
e) 50 m/s f) 62,2 m g) 250 m
15) 20 s (observe que na resposta você tem 2 resultados: 10s é na subida e 20s na descida)
16) 250 m 17) b 18) c 19) a
20) 1.V 2.V 3.F 4.V 5.F 6.F 7.V 8.V 9.V
21) c 22) b 23) c 24)d
25) v_x= 80 m/s v_y= 10 m/s
$v \cong 80{,}6$ m/s t = 6 s
26) $t_1 = t_2 = t_3 = 0{,}5$ s
27) b
28) 1 s e 4 m/s

Movimentos Circulares

29) $\pi/6$ s
30) π m/s ou 6000 π cm/min ou 100π cm/s
31) a) $\pi/10$ m/s b) π m/s
32) b 33) 1 000 rad/s
34) a) 0,5 m/s b) 0,5 rad/s
c) 4π s
35) $\omega_A = 100\pi$ rad/s
$\omega_B = 400\pi$ rad/s
V = 2 000 π cm/s
36) c 37) $a \cong 7{,}5$ m/s^2
38) 1.V 2.F 3.F 4.V 5.V 6.F
7.V 8.F 9.V 10.V 11.F
12.V
39) d 40) e 41) c 42) d
43) a 44) a 45) b 46) d
47) 5 000 m/s^2
48) 50 rpm e 100 π / 6 cm/s