Ondulatória

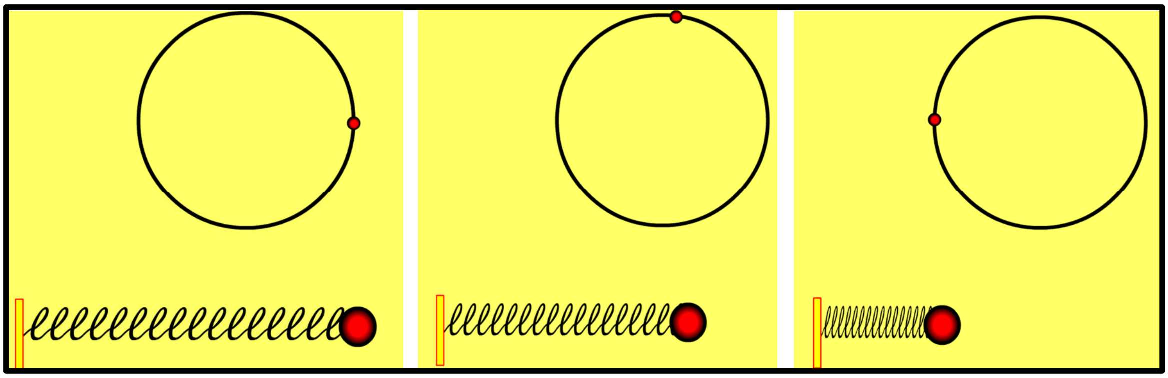
Assunto: Movimento Harmônico Simples

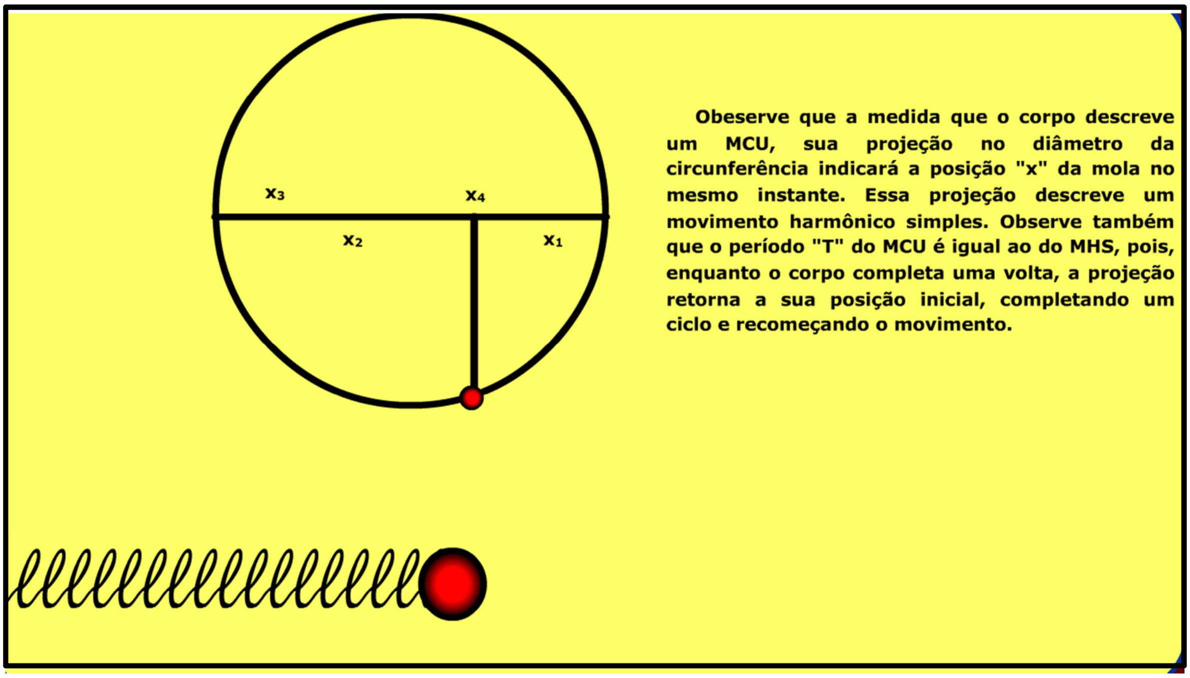
Aula 02 – Funções horárias do MHS

Para acompanhar esta aula em vídeo, vá à aba "Aulas" e clique em Ondulatória – aula 02

Movimento Harmônico Simples

Agora é que realmente começa o nosso curso de MHS. Como já foi definido anteriormente o MHS é todo movimento periódico cujo sentido é regularmente invertido. É possível obter as equações horárias do MHS a partir da definição **F = - K . x** (lei de Hooke), usando-se cálculo diferencial (curso superior). Entretanto, no ensino médio, utilizamos um artifício que consiste em analisar a projeção de um movimento circular uniforme sobre um dos seus diâmetros. Conforme veremos, o movimento dessa projeção é harmônico simples. Tente perceber isso que foi dito nas figuras abaixo.





Elongação no Movimento Harmônico Simples

Observe inicialmente que no movimento circular, o raio da circunferência será igual a amplitude do MHS.

Imagine **(figura 1)** que em um instante $t_0 = 0$, o corpo preso a mola está passando por uma posição inicial x_0 que corresponderá na circunferência uma posição angular θ_0.

Para se determinar o valor de x_0 a partir do movimento circular, basta projetarmos a posição angular representada na circunferência pelo cos θ_0.

$$x = R \cdot \cos \theta_0$$

Como o valor do raio é igual ao valor da amplitude do movimento, podemos substituir:

$$\boxed{x = A \cdot \cos \theta_0}$$

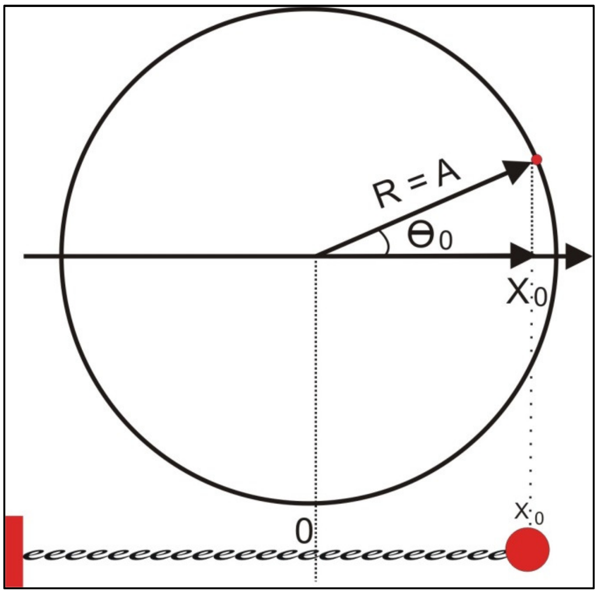
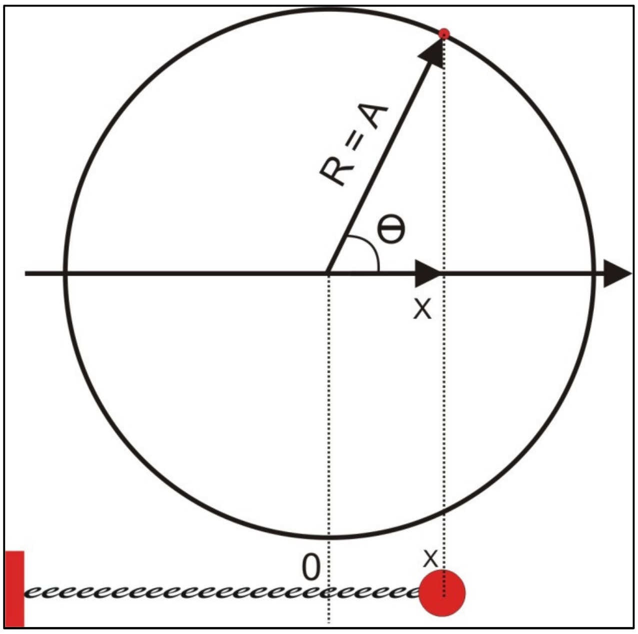


Figura 1



Continuando o movimento, para um instante “t” qualquer, teremos uma posição angular “θ” (fase) que projetada no eixo-x nos dará o vetor posição no MHS. **(Figura 2)**

$$x = R \cdot \cos \theta$$

Como $R = A$ e $\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$ do MCU, teremos:

$$\boxed{x = A \cdot \cos (\omega t + \theta_0)}$$

Esta é a equação horária da elongação do MHS. O termo $(\omega t + \theta_0)$ é denominado fase do MHS, expressa em radianos, sendo variável com o tempo, cujo cosseno varia entre o valor máximo +1 (quando então x = +A e o valor mínimo -1 (quando então x = - A), sendo “A” a amplitude máxima do movimento. O termo “ω” é denominado pulsação do MHS e é expresso em rad/s. Observemos que a pulsação “ω” do MHS corresponde a velocidade angular do MCU, guardando com o período a mesma relação vista na aula anterior: $\omega = 2\pi/T$

Resumindo:

$$\boxed{x = A \cdot \cos (\omega t + \theta_0)}$$

x = elongação do MHS. A elongação é a distância em relação ao ponto de equilíbrio em um MHS.

A = Amplitude do MHS (raio da circunferência quando comparado com MCU.

ω = pulsação do MHS e chamado também de frequência angular (velocidade angular do MCU.

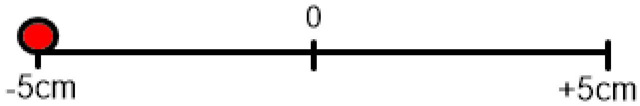
t = tempo no instante considerado .

$\boldsymbol{\theta_0}$ = Fase inicial do MHS (ângulo inicial quando comparado ao MCU).

Exercícios de aprendizagem:

1) Um móvel em movimento harmônico simples desloca-se entre as posições - 5cm e + 5cm de sua trajetória, gastando 10s para ir de uma à outra. Determine, para esse MHS:

a) a amplitude;
b) o período;
c) a frequência;
d) a pulsação.



a) A = 8cm b) T = 20s c) f = 1/20 Hz d) ω = (π/10)rad/s

2) Um móvel executa um movimento harmônico simples de amplitude 2m, pulsação 2π rad/s e fase inicial π rad.

a) Determine o período e a frequência desse MHS.
b) Escreva a equação horária da elongação.

a) f = 1Hz T = 1s b) $x = 2 . \cos(2\pi t + \pi)$

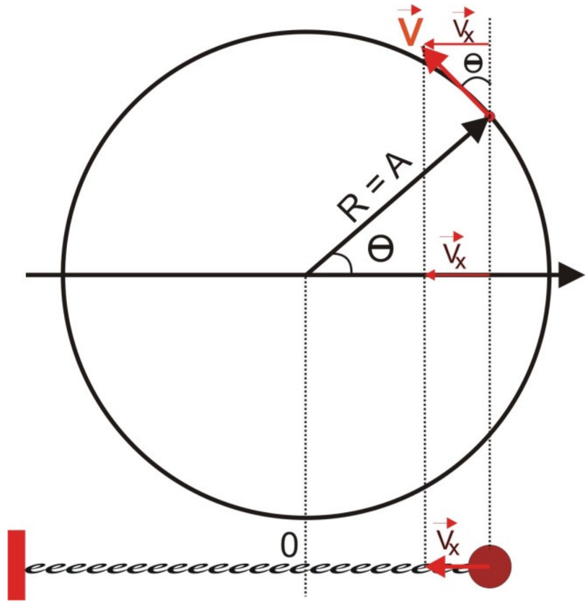
3) É dada a função horária da elongação de um MHS em unidades do Sistema Internacional $x = 3 . \cos(\pi/4 . t + 2\pi)$. Determine:

a) A amplitude.
b) A pulsação.
c) A fase inicial.
d) A frequência.
e) O período.
f) A elongação no instante t = 2s.

a) A = 3m b) ω = (π/4)rad/s c) $\theta_0 = 2\pi$rad d) f = 1/8 Hz e) T = 8s f) x = 0

Velocidade no Movimento Harmônico Simples

Do mesmo jeito que fizemos para a elongação iremos fazer agora para a velocidade. Sabemos que o vetor velocidade no MCU é tangente à trajetória. Se projetarmos este vetor no eixo-x teremos a velocidade no MHS.



$$\mathbf{v_x} = \mathbf{v} \,.\, \text{sen}\, \theta$$

Sabemos do MCU que $v = \omega \,.\, R$

$$\mathbf{v_x} = \omega \,.\, R \,.\, \text{sen}\, \theta$$

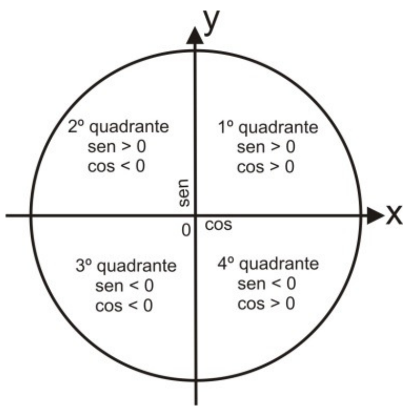
E que $\theta = \theta_0 + \omega.t$ e que $R = A$

$$v_x = \omega \,.\, A \,.\, \text{sen}\,(\omega t + \theta_0)$$

Porém agora surge um pequeno problema. Observe que no 1º e 2º quadrante a projeção da velocidade no eixo-x será negativa e o sen $\theta > 0$. Já no 3º e 4º quadrante a projeção da velocidade será positiva e o sen $\theta < 0$. Para corrigir isso colocamos um sina (-) na equação.

$$\boxed{v_x = -\,\omega \,.\, A \,.\, \text{sen}\,(\omega t + \theta_0)}$$

Obs. Quando sen $(\omega t + \theta_0) = 0$ ($\theta = \pi$ rad, 2π rad, $3\,\pi$ rad, ...) o corpo no MHS estará invertendo o sentido do movimento. Sendo assim $v_X = 0$. Já quando sen $(\omega t + \theta_0) > 0$ ($0 < \theta < \pi$) $v_X < 0$ e quando sen $(\omega t + \theta_0) < 0$ ($\pi < \theta < 2\pi$) $v_X > 0$. As velocidades máximas ocorrerão quando $x = 0$, ou seja, para sen $\theta = \pm 1$ ($\theta = \pi/2$, $3\pi/2$, ...)



Exercício de aprendizagem:

4) Uma partícula executa um MHS cuja função horária da velocidade é $v = (-\pi/4)\,.\,\text{sen}\,((\pi/2).t)$ no SI.

a) Calcule a amplitude e a pulsação do movimento.

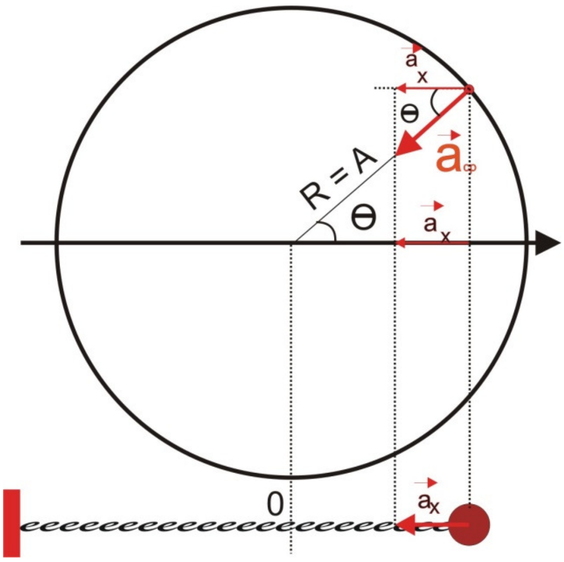
b) Calcule a frequência do movimento.

c) Ache a função horária da elongação.

a) $A = ½$ m $\omega = \pi/2$ rad/s b) $f = ¼$ Hz c) $x = 0{,}5\,.\,\cos\,((\pi/2).t)$

Aceleração no Movimento Harmônico Simples

Como estamos comparando o MHS com o MCU, sabemos que a aceleração existente no MCU é a aceleração centrípeta. Observe na figura abaixo que para projetarmos a aceleração centrípeta no eixo-x deveremos projetar o vetor aceleração centrípeta no cateto adjacente ou seja deveremos usar o cos θ.



$$\mathbf{a_x} = \mathbf{a_{cp}} \cdot \cos\theta$$

Sabemos do MCU que $a_{cp} = \omega^2 \cdot R$

$$a_x = \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\theta)$$

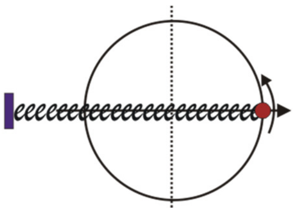
E que $\theta = \theta_0 + \omega.t$ e ainda $R = A$, logo:

$$a_x = \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \theta_0)$$

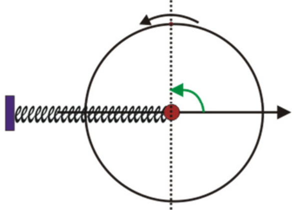
Porém surge o mesmo problema de sinal estudado para a velocidade. Observe que no 1º e 4º quadrante a projeção da aceleração no eixo-x será negativa e o cos θ > 0. Já no 2º e 3º quadrante a projeção da aceleração será positiva e o sen θ < 0. Para corrigir isso colocamos um sina (-) na equação.

Resumindo:

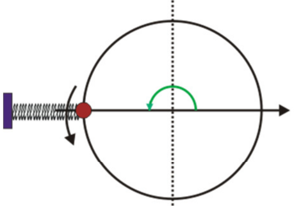
$$\boxed{a_x = -\,\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0)}$$



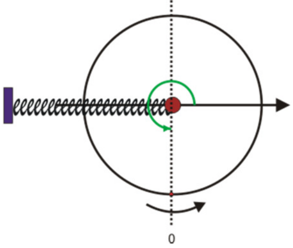
θ = 0
x = +A – elongação máxima positiva igual a amplitude “A”.
v = 0 – velocidade nula.
a – aceleração máxima negativa.



θ = (π/2) rad
x = 0 – elongação nula
v – velocidade máxima negativa.
a = 0 – aceleração nula.



θ = π rad
X = - A – elongação mínima negativa.
v = 0 – velocidade nula.
a – aceleração máxima positiva.



θ = (3π/2) rad
x = 0 – elongação nula.
v – velocidade máxima positiva.
a = 0 – aceleração nula.

Complemento

As 3 equações do MHS vistas até agora são:

$$x = A \,.\, \cos(\omega.t + \theta_0)$$

$$v = -\,\omega \,.\, A \,.\, \text{sen}(\omega.t + \theta_0)$$

$$a = -\,\omega^2 \,.\, A \,.\, \cos(\omega.t + \theta_0)$$

Observe que **A . cos**$(\omega.t + \theta_0)$ é comum na primeira e na terceira equações, portanto podemos escrever a equação da aceleração da seguinte maneira:

$$\boxed{a = -\,\omega^2 \,.\, x}$$

- A aceleração será nula na posição de equilíbrio x = 0.
- A aceleração será máxima para $x = \pm A$, que será nas posições de inversão do movimento.
- Já a velocidade será máxima na posição de equilíbrio. No MHS equivalerá a $\text{sen}(\omega t + \theta_0) = 1$, ou seja:

$$\boxed{v_{máx} = \pm\, \omega \,.\, A}$$

Exercício de aprendizagem:

5) Um corpo executa um movimento harmônico simples, de tal forma que a sua posição em função do tempo é dada pela seguinte expressão: $x = 5{,}0 \cos(4\pi.t + \pi/2)$ no SI. Determine:

a) a amplitude e a pulsação do movimento;

b) O período e a frequência;

c) as funções horárias da velocidade e da aceleração;

d) para o instante t = 4s, a elongação, a velocidade e a aceleração instantânea.

a) A = 5m $\omega = 4\pi$ rad/s b) T = 0,5s $f = 2$ Hz c) $v = -20\pi.\ \text{sen}(4\pi.t + \pi/2)$ $a = -80\pi^2 \cos(4\pi.t + \pi/2)$ d) x = 0, $v = -20\pi$ m/s , a = 0

Exercícios de Fixação:

1) Uma partícula realiza um MHS de função x = 10 cos $\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + \pi\right)$, no sistema CGS. Determinar:

a) a amplitude, a pulsação e a fase inicial

b) o período e a frequência do movimento.

2) Uma partícula move-se ao longo de um eixo Ox, obedecendo à função x = 2 cos π.t (SI), onde x é a elongação e t é o tempo. Obtenha:
a) a amplitude, a pulsação, o período, a frequência e a fase inicial do movimento.
b) os valores máximos da velocidade escalar e da aceleração escalar da partícula.

3) (Mack – SP) Uma partícula descreve um movimento harmônico simples segundo a equação $x = 0,3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2.t\right)$, no SI. O módulo da máxima velocidade atingida por esta partícula é:

a) (π/3) m/s
b) 0,2 . π m/s
c) 0,6 m/s
d) 0,1 . π m/s
e) 0,3 m/s

4) Uma partícula move-se obedecendo a função horária $x = 2 \cdot \cos\left(4\pi.t + \frac{\pi}{2}\right)$, com x em metros e t em segundos. Determine:
a) o período do movimento;
b) a velocidade escalar da partícula em t = 1s;
c) a aceleração escalar da partícula em t = 5s.

5) (UFV-MG) Uma partícula presa a uma mola executa um movimento harmônico simples. É correto afirmar que o módulo da velocidade da partícula é:
a) máximo quando a elongação é máxima.
b) mantido constante.
c) máximo quando ela apresenta a aceleração máxima.
d) mínimo quando a elongação é mínima.
e) mínimo quando ela apresenta a aceleração máxima.

6) Uma partícula executa um MHS cuja função horária da velocidade é $v = -\frac{\pi}{4} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ no SI.

a) Calcule a amplitude e a pulsação do movimento.
b) Determine as funções horárias da elongação e da aceleração do movimento.

7) Um ponto material realiza um MHS, tal que sua velocidade máxima é 10 m/s e sua aceleração máxima é 40 m/s^2. Determine:
a) a amplitude;
b) a frequência do movimento.

Gabarito: 1) a) A = 10 cm ω = π/2 nad/s θ = π rad b) T = 4s *f* = 0,25 Hz 2) a) A = 2 m ω = π rad/s T = 2s *f = 0,5 Hz* θ_0 = 0 b) $v_{máx}$ = 2π rad/s e $a_{máx}$ = 2π^2 m/s^2 3) C 4) a) T = 0,5 s b) v = - 8 π m/s c) a = zero 5) E (A letra D poderia até gerar uma dúvida, mas a letra E com certeza está correta)

6) a) A = ½ m e ω = π/2 rad/s b) $x = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ **;** $a = -\frac{\pi^2}{8} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ **7) A = 2,5 cm b) *f* = (2/π) Hz**