

## Apêndice IV Dinâmica das Rotações

### 1. A Origem das Rotações:

**1.1. Movimento que surge do intercâmbio com outro:** Já foi visto no movimento de translação de um corpo, que o movimento de um corpo pode originar da interação com outro corpo já em movimento. Será que acontece a mesma coisa com as rotações?

Se tentarmos perfurar uma pequena placa de madeira com uma furadeira elétrica, no momento em que a broca encostar na placa esta tenderá a girar no mesmo sentido da broca, se não estiver bem presa a alguma coisa. **(figura 1)**

Se encostarmos as rodas de um carrinho de brinquedo em um esmeril girando, observaremos que elas começarão a girar no sentido contrário ao do esmeril. **(figura 2)**

Estas situações, e outras tantas que podemos imaginar, nos dão indícios de que, na interação de dois corpos, estando um deles em rotação, “algo” irá se transferir para o outro, colocando-o também em rotação.

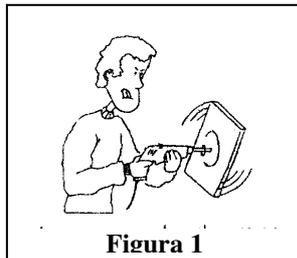


Figura 1

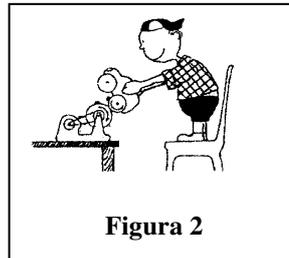


Figura 2

**1.2. Movimento que surge acoplado a outro:** Outras situações evidenciam que o início de um movimento de rotação pode vir acoplado ao de outro, de maneira semelhante à que ocorre com as translações.

Quando uma criança sobe no tablado de um carrossel parado e começa a correr, o carrossel também começa a girar no sentido contrário ao da criança. **(figura 3)**

Se uma pessoa sentada em uma cadeira giratória, retirar os pés do chão e tentar girar outra pessoa, sentada em outra cadeira giratória, também com os pés fora do chão, acabará girando no sentido oposto a esta. **(figura 4)**

E mesmo se uma pessoa estiver sentada numa cadeira giratória sem apoiar os pés no chão e tentar girar seu próprio corpo num sentido, sentirá que a cadeira tenta girar no sentido oposto. **(figura 5)**

Uma furadeira ou enceradeira, ao serem ligadas, tentam girar no sentido oposto ao da broca ou das escovas. Elas só não completam o giro porque estão seguras pelas mãos e, portanto, ao corpo de uma pessoa que, por sua vez, está apoiada no chão. **(figura 6)**

Podemos ainda pensar no que ocorreria com uma máquina de lavar roupa se ela tivesse rodinhas, ou com um liqüidificador se o ligássemos sobre uma pia ensaboada.

Estas situações, e outras tantas que podemos imaginar, nos dão indícios de que, na interação entre dois corpos inicialmente em repouso, que adquirem movimentos de rotação em sentidos opostos, “algo” surge simultaneamente nos dois corpos, como se estivesse tentando compensar em um o movimento de rotação adquirido pelo outro.

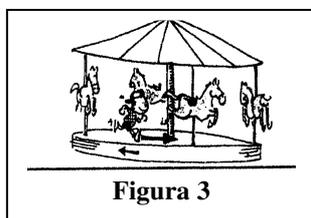


Figura 3

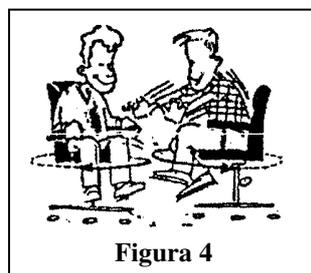


Figura 4

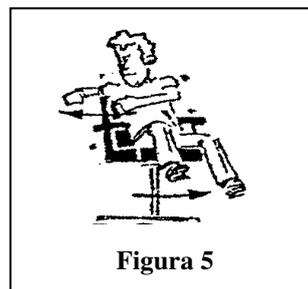


Figura 5

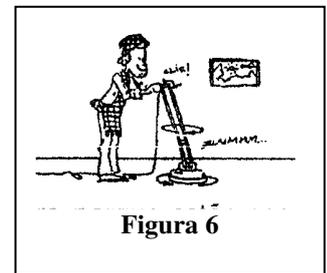


Figura 6

### 2. A Inércia das Rotações – Momento de Inércia

Ao observarmos um equilibrista em ação, podemos perceber que, para melhorar seu equilíbrio, ele abre seus braços ou faz uso de um longa vara, para diminuir sua tendência de giro, dificultando sua rotação e queda. **(figura 7)**

Uma bailarina inicia seu giro nas pontas dos pés e consegue aumentar sua velocidade de rotação simplesmente fechando os braços, isto porque com os braços abertos ela possui uma “**dificuldade de giro**” ou “**inércia rotacional**” maior do que quando os tem fechados. **(figura 8)**

Da mesma maneira, o giro de uma pessoa sentada sobre uma cadeira giratória aumenta quando a pessoa fecha os braços. Em outras palavras, se admitirmos que “algo” se conserva constante nas rotações, diminuindo a inércia rotacional, aumenta a velocidade de giro. (**figura 9**)

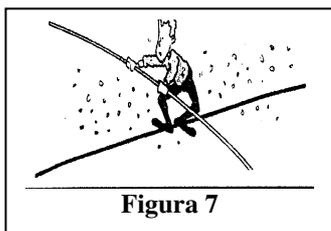


Figura 7

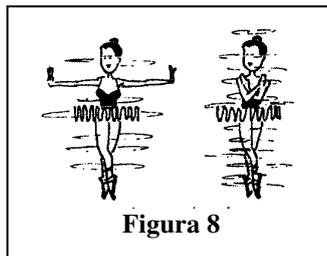


Figura 8

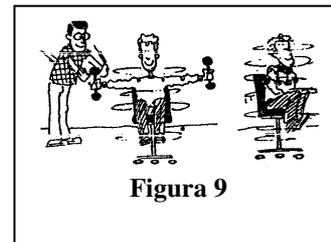


Figura 9

O aumento ou diminuição da velocidade de giro podem, portanto, ser obtidos pela alteração da distribuição das massas em rotação, ou seja, alterando a inércia rotacional do que está girando. Quando tem início uma rotação, quanto maior esta inércia, mais difícil será atingir uma certa velocidade de rotação, sob a ação de um mesmo agente externo. Esta dificuldade de giro ou inércia rotacional é geralmente denominada **MOMENTO DE INÉRCIA**.

O Momento de Inércia é para as rotações o que a massa é para as translações, só que ele depende da massa do corpo e também da sua distribuição em torno do eixo de rotação.

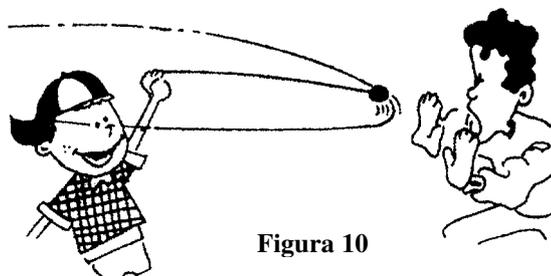


Figura 10

O Momento de Inércia varia não só de um corpo para outro, como também para um mesmo corpo, dependendo da escolha do eixo de rotação.

A expressão mais simples para definição do momento de inércia é a relativa a um corpo de dimensões irrelevantes girando em torno de um eixo de rotação situado fora dele, tal como uma pedra girando presa a um fio. (**figura 10**)

Para este corpo, calculamos o valor do momento de inércia pela expressão:

$$I = mr^2$$

Onde, no SI de unidades:

- $I$  = momento de inércia, expresso em  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
- $m$  = massa do corpo expressa em  $\text{kg}$ .
- $r$  = raio de rotação (distância do corpo ao eixo de rotação), expresso em  $\text{m}$ .

O fato de as dimensões do corpo serem muito pequenas se comparadas ao raio de giro, permite considerarmos toda a massa do corpo concentrada em um único ponto, ou seja, neste caso podemos considerar o corpo como uma partícula situada a uma certa distância  $r$  do eixo de rotação.

### 3. Quantidade de Movimento Angular ou Momento Angular

**3.1. “Algo” que se conserva constante nos movimentos:** Quando realizamos a investigação dos movimentos de translação, ficou estabelecido que a quantidade de movimento linear do sistema se conservava.

Nos movimentos de rotação ocorre mais ou menos a mesma coisa.

Nas situações em que o início do movimento de rotação de um corpo depende da interação com outro já em movimento, admitimos que há uma troca ou intercâmbio de “algo” entre eles, que faz com que o corpo que estava em repouso comece a girar e que o corpo que estava girando diminua sua velocidade de rotação.

Nos casos em que o início do movimento de rotação ocorre acoplado a outro, isto é, quando dois corpos se encontram inicialmente em repouso, este “algo” surge simultaneamente nos dois corpos, que passam a girar em sentidos opostos, como se o giro de um buscasse compensar o giro do outro.

Observando deste modo, podemos estabelecer que, tanto nos intercâmbios como nos acoplamentos, a origem dos movimentos de rotação está sempre ligada a “algo” que se conserva constante durante a interação entre dois corpos.

Entendendo que este “algo” que vai quantificar o movimento de rotação a se originar, daremos a ele a denominação de QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR ou MOMENTO ANGULAR.

### 3.2- Expressão Matemática da Quantidade de Movimento Angular:

Voltemos à análise de acoplamento criança-carrossel. Antes da criança começar a correr sobre o tablado do carrossel, a quantidade de movimento angular do sistema constituído pelo carrossel e pela criança era nula, pois não havia movimento de rotação.

Quando a criança começa a correr, adquire uma certa quantidade de movimento angular em relação ao eixo do carrossel, em um sentido. Imediatamente, o carrossel adquire a mesma quantidade de movimento angular no sentido oposto, passando a girar em torno de seu próprio eixo. Quanto maior for a velocidade da criança sobre o carrossel, maior será a velocidade de rotação deste no sentido oposto. (figura 11)

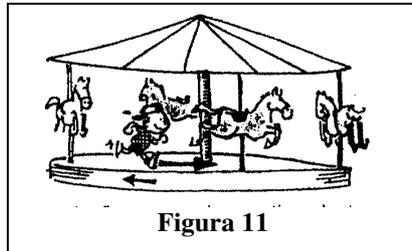


Figura 11

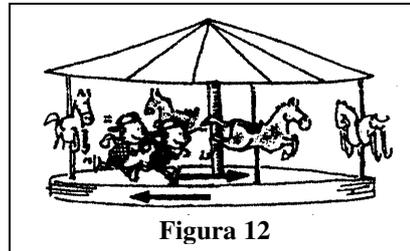


Figura 12

A conclusão que podemos tirar desta análise é que, para um mesmo momento de inércia, quanto maior a velocidade angular, maior é a quantidade de movimento angular.

Reanalisaremos, agora, a situação, imaginando que duas crianças de mesma massa estão correndo sobre o tablado do carrossel, com a mesma velocidade no mesmo sentido e a mesma distância do eixo. Observaremos que a velocidade de rotação do carrossel no sentido oposto será o dobro daquela produzida por uma só criança. (figura 12)

Aumentando o número de crianças correndo, aumentamos o momento de inércia do que está girando em um sentido. Como o carrossel, que não teve seu momento de inércia alterado, passou a girar com maior velocidade angular, podemos afirmar que a quantidade de movimento angular de ambos aumentou quando se aumentou o momento de inércia do que girava em um sentido.

A conclusão que podemos tirar desta análise é que, para uma mesma velocidade angular, quando maior o momento de inércia, maior é a quantidade de movimento angular.

Convencionou-se, então, que a quantidade de movimento angular ou momento angular de um corpo é uma grandeza definida pelo produto entre o momento de inércia do corpo e sua velocidade angular, ou seja:

Onde no SI de unidades:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

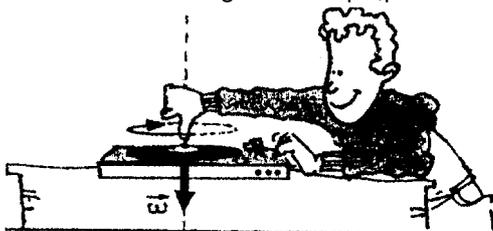
- $\vec{L}$  = Quantidade de movimento angular ou momento angular, expresso em  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
- $I$  = Momento de inércia, expresso em  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
- $\vec{\omega}$  = velocidade angular, expressa em  $\text{rad/s}$

É importante observar, que sendo a velocidade angular, uma grandeza vetorial, o produto  $I \cdot \vec{\omega}$  resultará em um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido de  $\vec{\omega}$ .

Assim sendo, pode-se afirmar que a quantidade de movimento angular ou momento angular é uma grandeza vetorial com as seguintes características:

- Módulo:  $L = I \cdot \omega$
- Direção: a mesma de  $\vec{\omega}$
- Sentido: o mesmo de  $\vec{\omega}$

Convém lembrar que a direção da velocidade angular é a do eixo de rotação e que o seu sentido depende do sentido de giro do corpo, podendo ser determinado pela regra prática da mão direita.



Colocando os dedos indicador, médio, anelar e mínimo no sentido do movimento, o dedo polegar numa posição perpendicular ao braço, indicará o sentido da velocidade angular, que é o mesmo da quantidade de movimento angular.

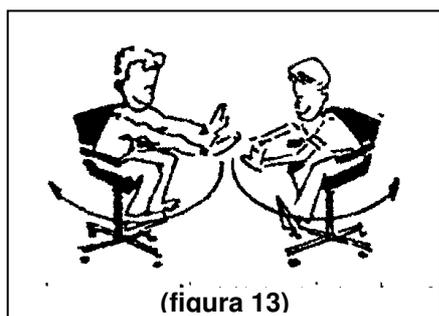
### 4- Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Angular ou Momento Angular:

Até agora, mostramos que uma rotação pode ser originada do intercâmbio com outra ou acoplada a outra e que, em ambos os casos, a quantidade de movimento angular total do sistema permanece inalterada imediatamente antes e imediatamente após a interação entre dois corpos.

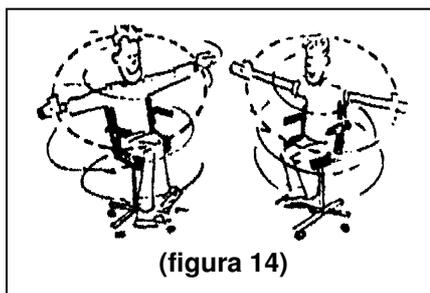
De acordo com este princípio, se duas pessoas sentadas em cadeiras giratórias retirassem os pés do chão e se empurrassem mutuamente cada uma delas adquiriria certa velocidade angular. Como a quantidade de movimento angular do sistema antes de as pessoas se empurrarem era zero, depois, cada parte do sistema (cada pessoa) deverá ter momentos angulares opostos e de mesma intensidade. Porém, quem possuir maior momento de inércia ( $I$ ) girará com menor velocidade angular ( $\omega$ ), de forma que a quantidade de movimento angular do sistema depois do empurrão continuará sendo nula. (figura 13)

Se, depois que estiverem girando, as duas pessoas abrirem os braços aumentarão seus respectivos momentos de inércia e isto fará diminuir suas velocidades angulares, de maneira que a quantidade de movimento angular de cada uma, assim como a quantidade de movimento angular total do sistema não se alteram. (figura 14)

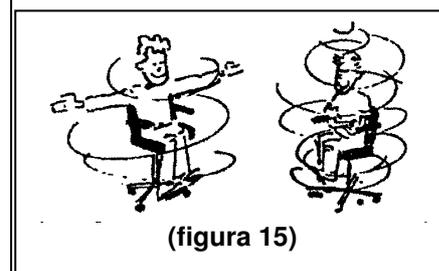
Se uma das pessoas ficar abrindo e fechando os braços enquanto gira, sua velocidade angular diminuirá e aumentará a cada movimento dos braços, de modo a manter inalterada a quantidade de movimento angular total do sistema. (figura 15)



(figura 13)



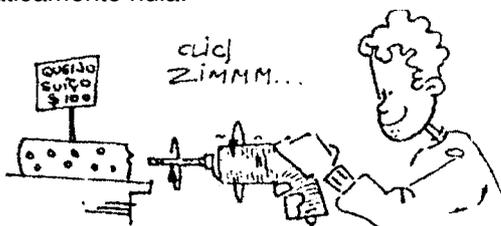
(figura 14)



(figura 15)

Há situações, entretanto, em que a quantidade de movimento angular parece não se conservar. É o caso por exemplo, de uma furadeira elétrica, que produz rotação na broca e, quando segura pelas mãos de uma pessoa, não gira em sentido contrário.

Contudo devemos notar que este sistema não é constituído somente pela broca e carcaça da furadeira. Como a carcaça está segura pela pessoa, que por sua vez está apoiada na Terra, o momento de inércia do conjunto (carcaça – pessoa – Terra) é tão grande, que a velocidade por ele adquirida é praticamente nula.



Esse raciocínio também é válido para o exemplo da criança girando uma pedra amarrada por um barbante. Como ela está “fixa” à Terra, o momento de inércia da pedra é desprezível em relação ao conjunto criança – Terra. Sendo assim, o giro de reação não é o perceptível.

#### Exercícios:

1) Definimos momento de inércia de um corpo a grandeza que nos informa a \_\_\_\_\_ (facilidade/dificuldade) de giro ou inércia de rotação. O momento de inércia depende da \_\_\_\_\_ (temperatura/massa) e da sua distribuição em torno do eixo de rotação. Quanto maior a massa, \_\_\_\_\_ (maior/menor) é o momento de inércia. Quanto maior a distância dos pontos que compõem o corpo em relação ao eixo de rotação, \_\_\_\_\_ (menor/menor) é o momento de inércia do corpo. Quanto maior é o momento de inércia \_\_\_\_\_ (menor/menor) é a dificuldade de giro. Para um equilibrista melhorar o seu equilíbrio ele utiliza uma vara para \_\_\_\_\_ (aumentar/diminuir) seu momento de inércia. Quando uma bailarina inicia seu giro e fecha os braços, sua velocidade de rotação \_\_\_\_\_ (aumenta/diminui).

Definimos a grandeza velocidade angular como a razão entre \_\_\_\_\_ (o ângulo descrito/a distância percorrida) por um ponto de um corpo e o intervalo de tempo necessário. A velocidade angular nos informa sobre a \_\_\_\_\_ (dificuldade/rapidez) de giro, sendo uma grandeza \_\_\_\_\_ (escalar/vetorial) cuja direção é \_\_\_\_\_ (paralela/perpendicular) ao eixo de rotação de sentido dado pelo polegar da mão (esquerda/direita) com os outros dedos informando o sentido de giro.

Análogo ao momento linear de um objeto que translada, definimos a grandeza momento angular como aquela que nos informa a quantidade de movimento angular de um corpo que gira. Quanto maior o momento de inércia de um corpo, \_\_\_\_\_ (maior/menor) será o seu momento angular e quanto maior a velocidade angular, \_\_\_\_\_ (maior/menor) será o seu momento angular. Para

um corpo que possui momento angular constante, quanto menor o momento de inércia, \_\_\_\_\_ (maior/menor) é a velocidade angular.

2) Assinale a alternativa INCORRETA:

- a) Nas translações há conservação do momento linear do sistema;
- b) Massa e momento de inércia são a mesma coisa;
- c) A direção da quantidade de movimento angular é a mesma de velocidade angular;
- d) Nas rotações o momento angular do sistema se conserva.

3) Se um liquidificador for ligado sobre uma pia ensaboada tenderá a girar no sentido contrário ao de sua hélice. Isto se deve:

- a) ao princípio da ação e reação;
- b) ao princípio da conservação da energia;
- c) ao princípio da inércia;
- d) ao princípio da conservação do momento angular.

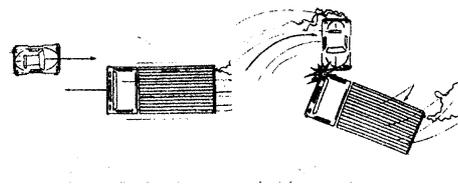
4) A respeito da quantidade de movimento angular, assinale a alternativa CORRETA:

- a) tem módulo dado pelo produto entre a massa e a velocidade angular;
- b) tem o mesmo sentido da aceleração angular;
- c) tem o mesmo sentido da velocidade angular;
- d) tem a direção da força aplicada sobre o corpo.

5) Assinale a alternativa CORRETA:

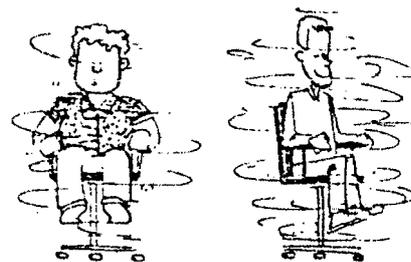
- a) força, massa e tempo são grandezas escalares;
- b) momento de inércia é grandeza vetorial;
- c) momento linear e momento angular são grandezas vetoriais;
- d) velocidade e aceleração são grandezas escalares;
- e) momento de inércia e momento angular são grandezas escalares.

6) Numa batida não totalmente frontal, entre um automóvel e um caminhão, o automóvel sofre um giro maior que o caminhão. Assinale a alternativa que melhor explica esta situação:



- a) A força aplicada sobre o automóvel é menor do que a aplicada sobre o caminhão;
- b) A força de atrito sobre o caminhão é maior do que a que age sobre o automóvel;
- c) O momento de inércia do caminhão é maior que o do automóvel;
- d) Os pneus do automóvel provavelmente estão carecas;
- e) A massa do caminhão é maior que a do automóvel.

7) A respeito de duas pessoas, uma gorda e outra magra, sentadas em cadeiras giratórias com os pés fora do chão, que empurram mutuamente, é incorreto afirmar que:



- a) a pessoa gorda girará com menor velocidade angular;
- b) a pessoa magra tem menor momento de inércia;
- c) a pessoa gorda tem maior inércia rotacional;
- d) a pessoa magra adquirirá maior momento angular;
- e) a pessoa gorda adquirirá o mesmo momento angular, em módulo, da pessoa magra.

8) Um mergulhador olímpico, ao executar um salto ornamental, encolhe os braços e pernas. Podemos justificar tal técnica como:

- a) tentativa de aumentar o momento de inércia, dificultando o giro;
- b) uma bela coreografia, sem nada alterar o movimento do mergulhador;
- c) tentativa de diminuir o momento de inércia, dificultando o giro;
- d) tentativa de diminuir o momento de inércia para aumentar a velocidade de rotação;
- e) tentativa de aumentar o momento de inércia para aumentar a velocidade de rotação.

9) Uma ginasta olímpica russa, ao praticar exercícios no aparelho denominado Trave, abre os braços depois de um salto mortal. Com este gesto, ela pretende:

- a) apenas cumprimentar o público que a assiste;
- b) aumentar a velocidade de giro;

- c) conseguir melhor equilíbrio pela diminuição do momento de inércia;  
d) conseguir melhor equilíbrio pelo aumento do momento de inércia;  
e) diminuir o seu momento de inércia e aumentar sua velocidade angular.
- 10) Um patinador gira sobre si próprio com os braços estendidos., Ele coloca novamente os braços ao longo do corpo. Sobre o seu momento de inércia, seu momento angular e sua velocidade angular, podemos dizer que, respectivamente:  
a) aumenta, aumenta, aumenta;  
b) diminui, fica constante, diminui;  
c) diminui, diminui, aumenta;  
d) aumenta, fica constante, aumenta;  
e) diminui, fica constante, aumenta.
- 11) O prato de um toca-discos gira com uma frequência de 45 rotações por minuto (45 rpm). Calcule sua velocidade angular  $w$  em rad/s.
- 12) Um ciclista utiliza uma bicicleta cuja roda tem massa total de 2 kg, praticamente toda concentrada em sua borda, cujo raio é 30cm e que se desloca horizontalmente com velocidade 5 m/s. Qual o valor do momento angular da roda da bicicleta? Considere o momento de inércia da roda  $I = m R^2$ .

Respostas: 1) dificuldade/ massa/ maior/ maior/ maior/ aumentar/ aumenta/ diminui/ o ângulo descrito/ rapidez/ vetorial/ paralela/ direita/ maior/ maior/ maior/ é. 2) b 3) d 4) c 5) c 6) c 7) d 8) d 9) d 10) e 11)  $1,5 \pi$  rad/s 12)  $3 \text{ kg m}^2/\text{s}$

## BIBLIOGRAFIA:

GRAF - Grupo de Reelaboração do Ensino de Física

Instituto de Física da USP

EQUIPE DE ELABORAÇÃO DAS LEITURAS DE FÍSICA

Anna Cecília Copelli

Carlos Toscano

Dorival Rodrigues Teixeira

Isilda Sampaio Silva

Jairo Alves Pereira

João Martins

Luís Carlos de Menezes (coordenador)

Luís Paulo de Carvalho Piassi

Suely Baldin Pelaes

Wilton da Silva Dias

Yassuko Hosoume (coordenadora)

ILUSTRAÇÕES:

Fernando Chuí de Menezes

Mário Kano

GRAF - Instituto de Física da USP

Rua do Matão, travessa R, 187

Edifício Principal, Ala 2, sala 305

05508-900 São Paulo – SP

<http://axpfep1.if.usp.br/~gref/>



**Aula de Física**  
Aula particular de Física pela  
internet, individual ou em grupo.  
☎ (21) 98469-9906 - Whatsapp  
Programas Skype ou TeamViwer  
Veja como funciona em  
[www.fisicafacil.net](http://www.fisicafacil.net)